

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

## THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ  
Discipline : Mécanique des solides

École Doctorale Sciences pour l'Ingénieur : Mécanique, Physique,  
Micro et Nanoélectronique  
E.D. n°353

présentée par

**Lauréline BARBIÉ**

et soutenue publiquement le *3 octobre 2013*

**Raffinement de maillage multi-grille local en vue  
de la simulation 3D du combustible nucléaire des  
Réacteurs à Eau sous Pression**

### JURY

<b>Franck BOYER</b>	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille	Examineur
<b>Frédéric FEYEL</b>	Professeur associé à l'École Polytechnique	Rapporteur
<b>Anthony GRAVOUIL</b>	Professeur à l'INSA Lyon	Rapporteur
<b>Frédéric LEBON</b>	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille	Directeur de thèse
<b>Patrick LE TALLEC</b>	Professeur à l'École Polytechnique	Président du jury
<b>Isabelle RAMIÈRE</b>	Ingénieur-Chercheur au CEA Cadarache	Encadrante
<b>Juliette RYAN</b>	Ingénieur de recherche à l'Onera	Examinatrice



# Remerciements

Me voici enfin arrivée au moment le plus agréable de la rédaction même si ce n'est pas forcément le plus facile. Durant ces trois années de thèse, de nombreuses personnes m'ont accompagnée, de près ou de loin, et je voudrais ici les remercier.

J'ai eu la chance d'avoir un double encadrement exceptionnel, tant du point de vue scientifique qu'humain. Je tiens donc tout d'abord à remercier Isabelle Ramière, pour tout ce qu'elle m'a transmis lors de ces trois années, pour sa disponibilité (y compris en congés) et surtout pour son amitié. J'ai vraiment apprécié de travailler avec toi, et je te suis particulièrement reconnaissante d'avoir osé avoir parfois le mauvais rôle. Ton stylo violet et nos discussions entre filles autour d'un sandwich me manquent déjà... Je voudrais également remercier Frédéric Lebon, mon directeur de thèse, qui a su m'accorder du temps malgré un emploi du temps chargé. J'ai apprécié nos discussions, j'ai appris beaucoup de choses grâce à toi durant cette thèse et je suis heureuse de la confiance que tu m'as accordée. Et surtout, c'était agréable d'aller faire un tour chez "Papa" de temps en temps.

Je tiens par ailleurs à remercier Anthony Gravouil et Frédéric Feyel, qui ont accepté de rapporter mon travail et qui l'ont fait avec intérêt et application. Merci à Patrick Le Tallec, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, et à Juliette Ryan et Franck Boyer pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Cette thèse n'aurait sûrement jamais vu le jour si Victor Blanc ne m'avait pas d'abord acceptée en stage. Merci de m'avoir donné envie de continuer, et de m'avoir écoutée quand je venais papoter dans ton bureau durant la thèse. Merci aussi à Rodrigue Largenton qui a co-encadré mon stage, m'a été d'un grand soutien dans les moments de doute (même si ta soutenance un an avant moi m'a un peu mis la pression...), et s'est personnellement investi pour la suite. Votre amitié à tous les deux m'est très précieuse. J'en profite également pour remercier Renaud Masson qui m'a (un peu) poussée à continuer en thèse. Merci pour tes conseils et pour ton soutien.

Durant trois ans et demi, j'ai eu la chance d'être entourée de personnes fort sympathiques, et j'ai une pensée émue pour mes collègues du LSC et d'EDF. Un grand merci à JJ pour le soutien matin et soir, pour ton humour même si je n'étais pas toujours d'humeur, pour ton aide, tes conseils et surtout pour m'avoir accordé ton amitié au fil des années. "C'est fini" et j'en suis un peu triste. Merci Antoine pour m'avoir chaleureusement accueillie dans ton bureau lorsque je suis arrivée. Merci Bene pour tes compliments qui font toujours plaisir. Merci Thomas pour ton amour des ballerines bleues turquoises. Merci Patrick pour les discussions "cuisine" dans le bus. Merci Jérôme et Bruno pour votre aide et pour avoir pris le temps de relire une partie de mon manuscrit. Merci Katherine et Etienne pour avoir joué avec brio le jury d'un jour. Merci Vincent, Arnaud, Fred, Marc, Stéphane, Michel et tous les autres pour les discussions improvisées dans la salle à café ou ailleurs, et pour tous les bons moments passés ensemble. Une petite pensée pour les occupants du bureau des thésards, et bon courage pour la suite. Merci enfin à mes collègues de la bulle EDF, Charles, Gilles mais aussi Fabrice et Isabel, arrivés en cours de route, et bien sûr Jean-Baptiste qui

a traversé les différentes étapes de la vie d'un thésard quasiment en même temps que moi. Je n'oublie pas mes collègues du LMA, qui m'ont toujours très bien accueillie même si je n'étais là-bas qu'à temps partiel. Merci à Iulian et Aurélien pour la répétition. Une pensée toute particulière pour les thésards avec qui j'ai partagé de très bons moments, Alex (pour ton humour douteux, tes compétences d'animateur et Robocop) et Natacha (pour le bureau de filles, toutes nos discussions et la danse bien sûr).

Durant ces trois années, j'ai eu le privilège d'avoir trois super secrétaires, Régine, Annie et Laure. Merci pour tout, et en particulier pour l'organisation de la soutenance et pour avoir toujours laissée ouverte la porte de vos bureaux respectifs lorsque j'avais envie de parler (en particulier les derniers mois).

J'en arrive à la partie plus personnelle de ces remerciements. Je commencerai par remercier mes amis et en particulier les "8 (et quelques)" pour leur soutien à distance (voire à très longue distance) dans les moments difficiles, pour avoir trouvé de bonnes raisons de tous se retrouver, en particulier lors d'un certain week-end de mai inoubliable. Merci à Alexis pour les derniers préparatifs (j'espère en faire autant pour toi dans quelques mois) et à Aude, Audrey, Justine, Déborah, Quentin, Stéphane et Mélanie pour être venus.

Un grand merci à mes parents qui m'ont appris à donner le meilleur de moi-même et qui m'ont soutenue dans mes choix. Une pensée pour mon frère et pour ma belle-sœur pour leurs encouragements. J'ai gardé le meilleur pour la fin et je terminerai en remerciant mon mari, Christophe, qui m'a comprise lorsque j'ai décidé de commencer une thèse, m'a soutenue y compris pendant la rédaction (et ce n'était pas facile tous les jours) et m'a accompagnée durant ces trois années (et même plus). Pour tout cela, je lui dédie cette thèse.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Contexte et problématique de la thèse</b>	<b>3</b>
Introduction . . . . .	5
I.1 Problématique industrielle . . . . .	5
I.2 Cas tests d'application issus de la simulation du combustible nucléaire . . . . .	12
I.3 Autour des méthodes de raffinement de maillage . . . . .	15
Conclusion . . . . .	27
<b>II Vérification de la méthode LDC en élasticité linéaire</b>	<b>29</b>
Introduction . . . . .	31
II.1 La méthode Local Defect Correction (LDC) . . . . .	31
II.2 Application de la méthode LDC à l'élasticité linéaire . . . . .	38
II.3 Stratégie multi-niveaux . . . . .	45
II.4 Optimisation des performances par rapport au nombre de sous-niveaux . . . . .	61
Conclusion . . . . .	65
<b>III Automatisation de la procédure de raffinement</b>	<b>67</b>
Introduction . . . . .	69
III.1 Combinaison de LDC avec l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> de Zienkiewicz et Zhu . . . . .	69
III.2 Influence du rapport de raffinement . . . . .	81
III.3 Apport dans le cas 3D multi-singularités . . . . .	85
III.4 Comparaison avec d'autres méthodes de raffinement local . . . . .	91
Conclusion . . . . .	109
<b>IV Application de la méthode LDC à des lois de comportement non linéaires</b>	<b>111</b>
Introduction . . . . .	113
IV.1 La méthode LDC en mécanique non linéaire . . . . .	113
IV.2 Problème contenant une non linéarité matérielle . . . . .	118
IV.3 Ajout d'une évolution temporelle . . . . .	127
IV.4 Modification dynamique du maillage . . . . .	140
Conclusion . . . . .	148
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>149</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>153</b>
<b>A Méthodes multi-grilles</b>	<b>153</b>
A.1 Principe . . . . .	155

A.2 “Full Approximation Storage” et “Correction Scheme” . . . . .	156
A.3 “Full Multigrid” . . . . .	158
A.4 Approches algébriques et géométriques . . . . .	158
<b>Table des figures</b>	<b>163</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>169</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>

# Introduction générale

La modélisation de problèmes industriels intègre des phénomènes physiques de plus en plus complexes (géométrie, non linéarités, multi-physiques, multi-échelles, ...). Une précision de plus en plus grande sur les calculs est recherchée afin d'augmenter la finesse des résultats obtenus. Malgré les capacités des ordinateurs en constante augmentation, ces nouvelles problématiques nécessitent en permanence le développement de méthodes numériques performantes afin de rendre possible la simulation de telles complexités. Concernant la mécanique des solides, deux approches principales sont développées. D'une part, une première technique consiste à s'intéresser à plusieurs échelles du problème afin de coupler des informations microscopiques et macroscopiques. En effet, une approche directe est très coûteuse en termes de degrés de liberté et donc de temps de calcul, c'est pourquoi des techniques ont été spécifiquement développées pour ce type de problèmes (homogénéisation,  $EF^2$ , ...). D'autre part, pour des problèmes macroscopiques de grandes dimensions (grandes structures, singularités très localisées, ...), des solveurs de plus en plus performants ont également été mis au point (multi-grille, décomposition de domaine, ...) et des méthodes de raffinement ont été développées (raffinement adaptatif, multi-grille local, ...).

Plus particulièrement dans le domaine du nucléaire, les simulations doivent être suffisamment précises puisqu'elles traitent de phénomènes complexes dont la compréhension est liée à un enjeu de sûreté. Il est donc nécessaire de développer des méthodes numériques efficaces afin d'obtenir des simulations réalistes, et à moindre coût, que ce soit en temps de calcul ou en espace mémoire, comme dans toute problématique industrielle. Dans ce contexte, nous nous intéressons à l'Interaction Pastille-Gaine qui est un problème de contact localisé entre la pastille combustible et la gaine qui la contient. Ce contact peut entraîner, s'il est mal maîtrisé, la fissuration de la gaine et donc le rejet de produits de fission radioactifs dans le circuit d'eau du réacteur. Pour être prédictive du phénomène d'Interaction Pastille-Gaine, l'approche locale de l'endommagement de la gaine nécessite des maillages ayant des tailles de mailles très fines, de l'ordre du micron pour une pastille dont la taille caractéristique est le centimètre. La dimension du problème à résoudre est alors supérieure aux capacités mises en œuvre dans le cadre d'études industrielles.

Le but de cette thèse est de mettre au point et d'étudier les aptitudes d'une méthode de raffinement local de maillage pour répondre aux limitations numériques actuelles auxquelles la simulation de l'Interaction Pastille-Gaine est confrontée. En effet, les méthodes de raffinement local sont dédiées à la simulation de problèmes présentant des singularités locales. Les thématiques liées au raffinement de maillage dépassent largement le cadre du nucléaire, et les méthodes qui seront étudiées dans cette thèse pourront aisément être appliquées à d'autres problématiques industrielles (aéronautique, automobile ou génie civil par exemple).

Cette thèse a été financée par le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives) dans le cadre du projet PLEIADES, lui-même co-financé par le CEA, EDF (Électricité de France) et AREVA et qui vise à développer une plate-forme de simulation multi-physique du comportement des combustibles de toutes les filières nucléaires, répondant à la fois à des enjeux industriels et aux besoins d'études exploratoires ou de Recherche & Développement.

Dans le chapitre I, nous présentons le contexte dans lequel se place notre étude. Nous détaillons dans un premier temps la problématique industrielle traitée, et les cas tests à singularités locales choisis pour toutes les vérifications numériques effectuées dans cette thèse. Dans un deuxième temps, nous faisons un état de l’art des principales méthodes de raffinement existantes, afin de choisir la méthode la plus adaptée à nos besoins. Nous présentons également les estimateurs d’erreur *a posteriori*, outils associés classiquement aux méthodes de raffinement et très utiles pour détecter efficacement et automatiquement les zones d’intérêt à raffiner.

La méthode multi-grille locale de type “Local Defect Correction” choisie est tout d’abord détaillée dans le chapitre II. Puis la vérification de deux versions de cette méthode est réalisée sur un problème d’élasticité linéaire en mécanique des solides. Une étude quantitative permet ensuite d’optimiser le ratio précision/coût en fonction du nombre de grilles de raffinement utilisées.

Dans le chapitre III, nous proposons d’automatiser la détection des zones de raffinement. Pour cela, la méthode multi-grille locale est couplée à un estimateur d’erreur *a posteriori* de type Zienkiewicz et Zhu. Plusieurs études complémentaires sont ensuite réalisées avec cet outil automatisé. Tout d’abord, le rapport de raffinement choisi pour générer les sous-niveaux est modifié afin d’en quantifier l’influence. Un cas test tridimensionnel et multi-singularités permet de tester les performances de la méthode pour simuler des problèmes complexes. Enfin, plusieurs comparaisons avec d’autres méthodes de raffinement sont réalisées afin de mettre en avant les avantages et les inconvénients de la méthode choisie par rapport à des méthodes plus classiques et de confirmer le choix fait dans cette thèse.

Enfin, le chapitre IV concerne les développements réalisés en vue de l’application de notre méthode à des problèmes mécaniques non linéaires. Après avoir présenté les modifications nécessaires pour étendre l’algorithme de raffinement à un problème avec non linéarité matérielle dépendant du temps, des vérifications progressives sont menées. La première étude concerne un comportement non linéaire indépendant du temps (et donc de l’historique de chargement). Puis une évolution temporelle est ajoutée dans la seconde étude, mais à zone de raffinement fixée. Enfin, un raffinement automatique et adaptatif en temps est proposé.

Ainsi, nous traitons progressivement à l’aide de la méthode de raffinement multi-grille locale Local Defect Correction des problèmes de plus en plus complexes, afin de se rapprocher d’une simulation représentative de l’Interaction Pastille-Gaine.



# Chapitre I

## Contexte et problématique de la thèse

### Sommaire

---

Introduction . . . . .	<b>5</b>
I.1 Problématique industrielle . . . . .	<b>5</b>
I.1.1 Les Réacteurs à Eau sous Pression . . . . .	5
I.1.2 L'Interaction Pastille-Gaine . . . . .	7
I.1.3 Objectif de la thèse . . . . .	9
I.2 Cas tests d'application issus de la simulation du combustible nucléaire . . . . .	<b>12</b>
I.2.1 Mise en diablo : cas 2D( $r,z$ ) . . . . .	12
I.2.2 Fissuration de la pastille : cas 2D( $r,\theta$ ) . . . . .	13
I.2.3 Point triple : cas 3D . . . . .	13
I.3 Autour des méthodes de raffinement de maillage . . . . .	<b>15</b>
I.3.1 Méthodes de raffinement . . . . .	15
I.3.2 Estimateurs d'erreur <i>a posteriori</i> . . . . .	21
I.3.3 Choix de la méthode . . . . .	25
Conclusion . . . . .	<b>27</b>

---



## Introduction

Ce chapitre présente le contexte de l'étude, articulé autour de l'Interaction Pastille-Gaine ayant lieu sous irradiation dans les Réacteurs à Eau sous Pression, et pose la problématique de la thèse. Les situations étudiées sont tout d'abord présentées. Celles-ci possédant des singularités locales, l'utilisation de méthodes de raffinement local est envisagée. Les principales méthodes de raffinement local sont ainsi exposées dans ce chapitre et comparées afin de trouver celle permettant de répondre au mieux au contexte industriel dans lequel nous nous plaçons. Les estimateurs d'erreur *a posteriori*, très utiles afin d'automatiser le processus de raffinement local sont également présentés. Enfin, l'ensemble des problèmes types permettant de vérifier l'intérêt et l'efficacité de la méthode choisie sont détaillés.

## I.1 Problématique industrielle

### I.1.1 Les Réacteurs à Eau sous Pression

Ce chapitre présente quelques généralités sur les réacteurs à eau sous pression (REP) et sur le crayon combustible qui sera au cœur des problématiques de cette thèse. Les principales informations exposées ci-dessous sont issues de [CEA, 2013, Bailly *et al.*, 1997, Baron et Bouffieux, 2002, Lansiaert et Michel, 2008]. Nous renvoyons le lecteur à ces références pour plus de détails.

L'essentiel du parc électro-nucléaire français actuel est constitué de réacteurs issus de la filière des REP, ou Pressurized Water Reactors (PWR).

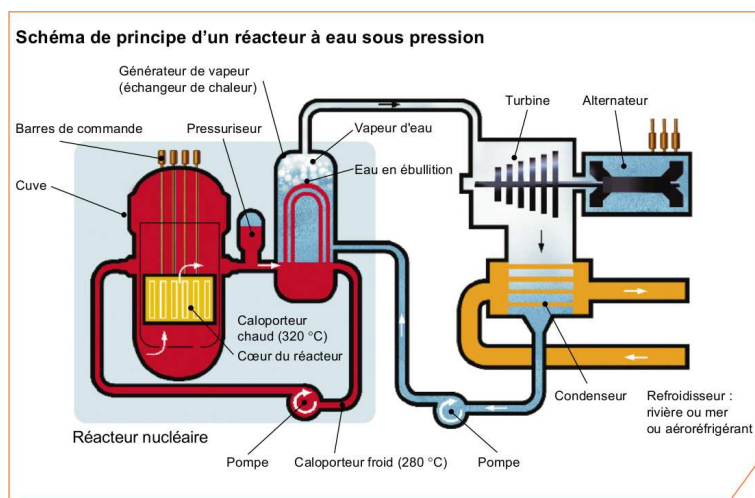


FIGURE I.1 – Schéma de principe d'un réacteur à eau sous pression [CEA, 2013]

Le principe de fonctionnement d'un REP est illustré sur la figure I.1. L'eau du circuit primaire, pressurisée à 15,5 MPa, sert à la fois à extraire l'énergie produite (rôle du caloporteur) dans le combustible au niveau du cœur du réacteur et à ralentir les neutrons (rôle du modérateur) pour entretenir la réaction en chaîne de fission nucléaire. En fonctionnement nominal, le fluide caloporteur rentre dans ce circuit à une température de 280 °C et en sort à une température de 320 °C environ. La chaleur ainsi récupérée est transmise au circuit secondaire au niveau d'un échangeur de chaleur. L'eau du circuit secondaire y est vaporisée. Ceci permet l'activation de turbines qui

produisent l'électricité. L'eau du circuit secondaire est ensuite refroidie par un circuit tertiaire.

Le cœur d'un REP est constitué d'un ensemble d'assemblages combustibles. L'assemblage est un réseau à pas carré de 17 cm de côté, contenant 264 crayons combustibles, 24 tubes guides servant à introduire des barres de commande et un tube d'instrumentation central. Cet arrangement géométrique permet la circulation de l'eau entre les crayons et donc l'évacuation de la chaleur hors du cœur du réacteur. L'ensemble est rigidifié par 8 grilles de maintien. A titre d'exemple, un réacteur d'une puissance de 900 MW<sub>e</sub> contient 157 assemblages combustibles, soit plus de 41000 crayons.

Le crayon combustible est un cylindre de 3,852 m de hauteur constitué (cf. figure I.2) :

- d'un tube de gainage de 9,5 mm de diamètre extérieur et d'environ 0,6 mm d'épaisseur, en alliage de zirconium, dont le rôle est de confiner les produits de fission (première barrière de confinement), d'assurer le maintien mécanique des pastilles et d'évacuer la chaleur produite par les réactions nucléaires vers le fluide caloporteur,
- d'un empilement de 265 pastilles combustibles (dont les caractéristiques sont détaillées dans la suite du paragraphe), appelé la colonne combustible,
- d'une chambre d'expansion permettant l'accommodation des gaz de fission et du gonflement axial de la colonne combustible par les produits de fission,
- d'un ressort en inconel, garantissant le maintien de la colonne combustible pendant le transport de l'usine vers la centrale,
- de deux bouchons d'extrémité en alliage de zirconium, soudés, assurant l'étanchéité et l'intégrité de l'ensemble.

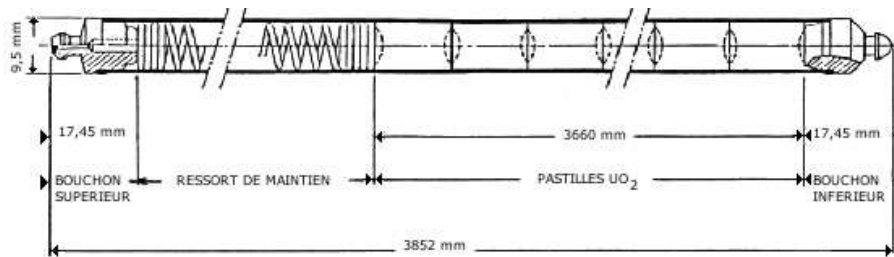


FIGURE I.2 – Schéma d'un crayon combustible

Un jeu initial, de l'ordre de 80  $\mu\text{m}$ , est présent entre la pastille et la gaine avant irradiation. Le combustible se présente sous forme de pastilles cylindriques de 8,2 mm de diamètre et 13,5 mm de hauteur qui sont constituées de dioxyde d'uranium ( $\text{UO}_2$ ) légèrement enrichi (inférieur à 5%) en noyaux fissiles ( $^{235}_{92}\text{U}$ ) ou d'un mélange d'oxydes appelé MOX contenant de 5 à 10% de dioxyde de plutonium ( $\text{PuO}_2$ ) et le reste en dioxyde d'uranium ( $\text{UO}_2$ ). La microstructure du combustible se présente alors sous forme de grains, dont la taille caractéristique est de l'ordre d'une dizaine de microns. La figure I.3 donne les caractéristiques géométriques principales des pastilles d'un REP. Celles-ci présentent un évidement hémisphérique à leurs extrémités. Son but est de compenser l'excès de dilatation du centre de la pastille par rapport à la périphérie. Les pastilles sont également chanfreinées pour faciliter leur introduction dans le tube de gainage et accommoder une partie de la déformation sous forme de diabolos.

Un réacteur fonctionne par cycles annuels. Lors de chaque arrêt entre deux cycles, un réarrangement du cœur a lieu : les assemblages usés sont déchargés et remplacés par des assemblages neufs, et les assemblages dont l'irradiation n'est pas terminée sont déplacés. Les assemblages restent dans le cœur 3 cycles ou plus.

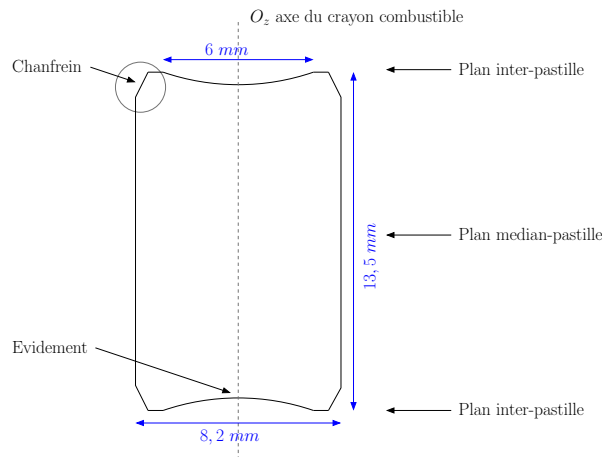
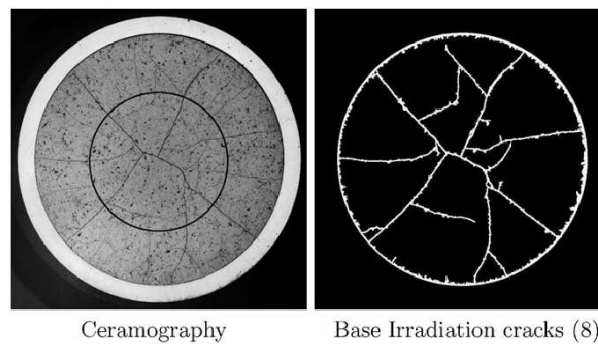


FIGURE I.3 – Dimensions caractéristiques des pastilles combustibles

### I.1.2 L'Interaction Pastille-Gaine

Durant l'irradiation, deux phénomènes conduisent à l'Interaction Pastille-Gaine (IPG) [Michel *et al.*, 2008b] :

- La pastille combustible se fissure dès le début de l'irradiation (voir figure I.4). De plus, la pastille gonfle du fait de l'irradiation et la gaine flue sous la pression extérieure du fluide caloporteur, ce qui provoque un contact entre la pastille et la gaine et un écartement des fragments de pastille. La fissuration de la pastille induit alors un contact discontinu.

FIGURE I.4 – Fissuration de la pastille ([Sercombe *et al.*, 2012], fig.3 p.167)

- Le fort gradient de température ramené à la dimension axiale finie de la pastille conduit à un phénomène de déformation sous forme de diabolos (cf. figure I.5(b)). Ainsi, le contact entre la pastille et la gaine apparaît d'abord en face du plan inter-pastille. La mise en diabolos est exacerbée par la fragmentation de la pastille. En effet, celle-ci permet le déplacement des points situés initialement sur l'axe de symétrie (cf. figure I.5(c)). La hauteur du chanfrein (en général  $160\ \mu\text{m}$ ) va conditionner la taille de la singularité dans la direction axiale.

Les deux phénomènes cumulés induisent ainsi des contraintes dans la gaine plus importantes au niveau des extrémités de pastille, en face des fractures radiales de la pastille.

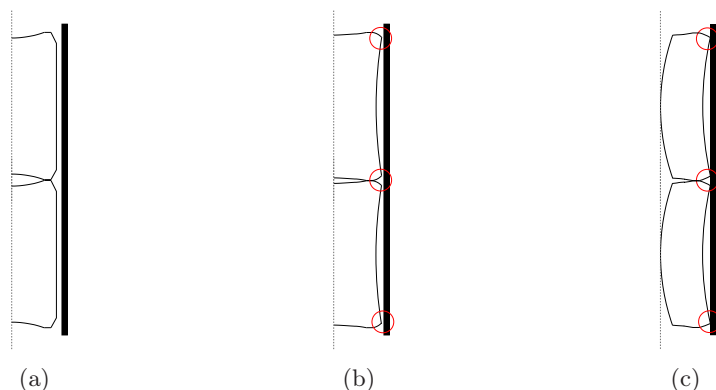


FIGURE I.5 – Illustration de la déformation en diabolo : avant (a) et après (b) irradiation, avec influence de la fragmentation (c)

Des essais de rampe de puissance en réacteurs expérimentaux [Alberman *et al.*, 1997] sont réalisés pour définir la limite technologique des crayons. Ces essais sont plus pénalisants que les conditions réelles de fonctionnement d’un réacteur et permettent de justifier du seuil que peut supporter le crayon. Des marges de sûreté sont ainsi définies, afin d’assurer l’intégrité des crayons, y compris au cours d’un incident de classe 2<sup>1</sup>. En effet, l’amplitude des phénomènes conduisant à l’IPG croît avec le niveau de puissance atteint et la durée du palier au niveau de puissance maximale et peut conduire à la fissuration de la gaine. La déformation de la gaine en état d’interaction forte avec la pastille est viscoplastique, c’est-à-dire qu’un couplage entre une déformation élastoplastique et une déformation par fluage induit une relaxation des contraintes dans la gaine. Cette viscoplasticité agit particulièrement dans les zones de contact pastille-gaine. Certaines zones de la pastille deviennent également viscoplastiques, celles à très fortes contraintes (les extrémités de la pastille) ou à température élevée (la zone centrale).

Le relâchement des gaz de fission augmente au cours de la rampe, et le dégagement des produits de fission volatils et corrosifs (principalement l’iode) s’accélère en particulier au droit des fissures radiales des pastilles. De plus, le phénomène d’IPG étant plus marqué au niveau de l’extrémité de la pastille et en face de ces mêmes fissures, c’est à cet endroit de la gaine, appelé point triple, que peuvent se développer des fissures par IPG/CSC<sup>2</sup> (Interaction Pastille-Gaine/Corrosion Sous Contraintes), car le dégagement de produits de fission corrosifs accélère le phénomène de fissuration par IPG, voir la figure I.6 par exemple. Par conséquent, une modélisation précise de l’IPG est nécessaire, car ce phénomène concerne l’intégrité de la gaine, première barrière de confinement du combustible irradié.

Depuis le premier exemple de rupture de gaine par IPG dans un réacteur civil en 1963 [Cox, 1990], des projets de R&D sur ce sujet sont réalisés dans le monde entier afin d’améliorer la compréhension et la modélisation des mécanismes pouvant conduire à une rupture de gaine par IPG [Garlick, 1973, Jernkvist, 1995, Alberman *et al.*, 1997, Brochard *et al.*, 2001, Marchal *et al.*, 2009], mais aussi de définir un design de crayon résistant à l’IPG [Holzer et Stehle, 1979, Gartner et Fischer, 1987, Retel *et al.*, 2004]. En pratique, le phénomène est évité en réacteur grâce aux conditions d’exploitation imposées. Néanmoins, les études expérimentales et numériques sur le sujet peuvent permettre d’augmenter la robustesse du combustible, grâce à une meilleure connaissance de l’IPG.

La modélisation du comportement du crayon combustible a débuté au CEA avec le code METEOR

1. incident de fréquence modérée : probabilité d’occurrence comprise entre 0.01 et 1 par réacteur et par an, qui se traduit par une variation de puissance de grande amplitude, sans rupture de la gaine

2. par simplification, nous le noterons dans la suite simplement IPG

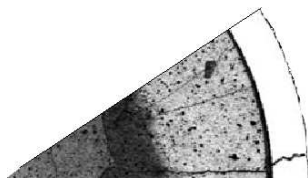


FIGURE I.6 – Exemple de fissure observée sur une gaine après irradiation en réacteur expérimental (rampe de puissance)

[Garcia et Moyne, 1997], basé sur une formulation 1D axisymétrique qui, via un couplage de chacun des phénomènes mis en jeu, fournit une estimation des évolutions géométriques moyennes de l'élément combustible et évalue le comportement des produits de fission et les modifications micro-structurales associées.

Une description détaillée des conditions de chargement local pour l'IPG nécessite une représentation 3D d'un fragment de pastille et de la gaine qui lui fait face. Afin de réaliser des calculs 3D, l'application combustible 3D TOUTATIS [Brochard *et al.*, 2001, Marchal *et al.*, 2009] a ensuite été développée à partir du code éléments finis CAST3M [CAST3M, 2013] du CEA. Deux phénomènes majeurs à prendre en compte ont été identifiés : la fragmentation de la pastille et le frottement à l'interface pastille-gaine. La qualité des modèles présents dans TOUTATIS a été évaluée en comparant les valeurs calculées du diamètre résiduel des gaines et du comblement des évidements à celles mesurées expérimentalement après des rampes de puissance. Le modèle 3D mis en place tient compte à la fois de la fracturation radiale et transversale de la pastille et fournit des résultats précis. Un modèle simplifié radial 2D( $r, \theta$ ), moins coûteux en temps de calcul, a également été testé. Des limitations apparaissent cependant dans ce modèle (gradient de contraintes).

Plus récemment, une application multi-dimensionnelle, ALCYONE [Michel *et al.*, 2008b, Marelle et Thouvenin, 2011], a été développée dans le cadre de la plate-forme combustible PLEIADES [Michel *et al.*, 2013] pour permettre d'intégrer et d'améliorer l'ensemble des modélisations avancées mises au point dans les codes METEOR et TOUTATIS.

Dans le domaine de la modélisation du combustible nucléaire, le CEA est à la pointe de la recherche. En effet, l'ensemble des calculs (1D, 2D, 3D) étant très complexes à cause du problème considéré (non linéarité du matériau, non linéarité de contact, ...), peu d'applications combustibles en dehors du CEA traitent de l'IPG et les rares applications développées sont souvent bidimensionnelles [Nakamura *et al.*, 1984, Jernkvist, 1995, Soba et Denis, 2008].

### I.1.3 Objectif de la thèse

Comme exposé précédemment, en raison du risque de rupture de gaine lors d'une forte montée en puissance, l'IPG est un phénomène qui doit être bien compris dans la démarche de sûreté de l'élément combustible des REP. En effet, la gaine doit pouvoir résister à tous les transitoires d'exploitation (dits de classe 1, montée en puissance des cycles d'irradiation classiques) et incidentels (dits de classe 2, forte montée en puissance imprévue dans le cycle d'irradiation classique, événement arrivant entre 0.01 et 1 fois par réacteur et par an) afin d'éviter le relâchement de produits de fission dans le circuit primaire. Pour se prémunir de ce risque, la démarche de sûreté consiste à limiter le domaine de fonctionnement autorisé des réacteurs à partir d'essais expérimentaux réalisés en rampe de puissance. Des résultats de modélisation (physique et numérique) plus précis de l'IPG pourraient donc permettre de diminuer ces limites de fonctionnement.

Certaines études assez anciennes [Diard, 2001] et des développements plus récents



[Michel *et al.*, 2008b, Michel *et al.*, 2008a] montrent que la taille de maille nécessaire afin de bien modéliser le phénomène de contact en 3D, et en particulier de bien évaluer la concentration de contraintes dans la gaine au niveau du point triple conduit à des nombre de degrés de liberté (ddl) et des temps CPU trop grands. En effet, la localisation des contraintes est liée à l'ouverture des fissures radiales de la pastille, de l'ordre de 20 à 40  $\mu\text{m}$  en rampe de puissance, ce qui nécessiterait des mailles de l'ordre du micron dans chaque direction pour une pastille d'un peu plus d'un centimètre de hauteur. Nous pouvons remarquer que cette taille de maille est inférieure à la taille moyenne des grains (quelques microns) composant la microstructure du combustible. Cependant, l'idée ici est d'obtenir une taille de maille cohérente avec le modèle utilisé, afin de bien quantifier l'effet de la singularité de pression du point de vue de la structure.

Plusieurs exemples de maillages utilisés actuellement pour la simulation de l'IPG sont présentés sur la figure I.7. Pour des raisons de symétrie, et en supposant la fracturation régulière de la pastille, seul 1/32 de pastille est représenté (voir [Nonon *et al.*, 2004] et la figure I.4 par exemple). Les maillages obtenus sont des maillages conformes mono-grilles et structurés. Pour des raisons de modélisation, ils sont constitués d'éléments quadrangles linéaires. Les mailles sont raffinées localement autour de la singularité ce qui conduit à des éléments très étirés. Les maillages obtenus sont alors similaires à ceux obtenus à l'aide d'un raffinement h-adaptatif global sur des éléments quadrangles. Les informations qui suivent sont extraites de [Sercombe, 2011].

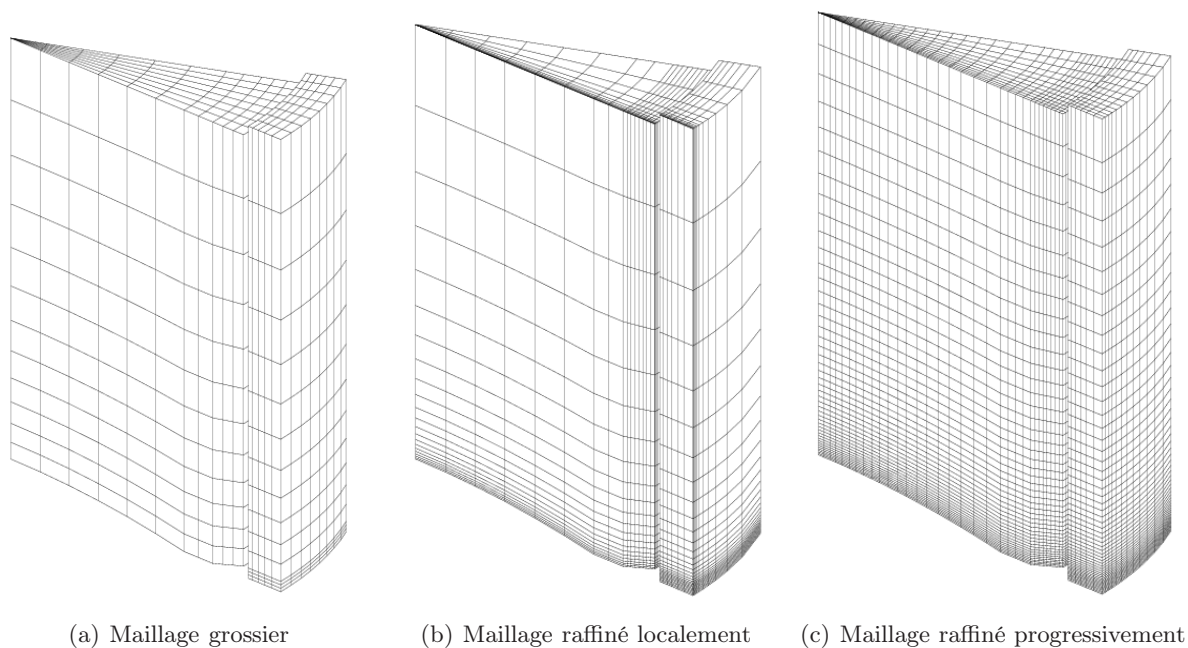


FIGURE I.7 – Exemples de maillages classiques utilisés pour la modélisation de l'IPG

Les maillages utilisés fréquemment sont ceux représentés sur la figure I.7(a). Ils ont des mailles minimales de l'ordre de 200  $\mu\text{m}$  dans toutes les directions pour la pastille et de 50  $\mu\text{m}$  dans les directions  $r$  et  $z$  pour la gaine. Ce maillage assez grossier contient environ 1700 éléments de maillage et 2800 relations de contact-frottement. Un calcul IPG classique (nominal-rampe) nécessite alors environ 11 heures de calcul sur un ordinateur à 2 cœurs de 8 Go chacun. Un second type de maillage, raffiné localement (voir figure I.7(b)) possède des mailles minimales de l'ordre de 20  $\mu\text{m}$  dans les directions  $r$  et  $z$  et 5  $\mu\text{m}$  dans la direction  $\theta$ . Ce raffinement est très localisé autour du point triple : les tailles de mailles augmentent rapidement sur le reste de la structure.



Cela conduit à l'utilisation d'éléments quasi dégénérés et donc à des systèmes mal conditionnés, pour lesquels la convergence de la méthode de résolution est difficile. Il possède environ 5150 éléments de maillages, soit 3 fois plus que le maillage classique. Mais l'augmentation rapide du nombre de ddl au niveau des zones de contact (environ 24700 relations de contact-frottement, soit près de 9 fois plus que le maillage classique) rend le calcul d'autant plus long et difficile (voir [Sercombe *et al.*, 2013] par exemple). En effet, 3 jours de calcul sont nécessaires pour réaliser un calcul IPG dans ce cas sur le même type d'ordinateur. Enfin, un maillage raffiné de façon plus régulière (voir figure I.7(c)) a également été testé pour réaliser un calcul de type IPG. Celui-ci possède des mailles minimales de l'ordre de  $20\ \mu\text{m}$  selon les directions  $r$  et  $z$  et de  $50\ \mu\text{m}$  selon la direction  $\theta$  mais les tailles de maille augmentent de façon plus progressive que dans le cas précédent, ce qui conduit à des éléments moins étirés. Par conséquent, le maillage est constitué d'environ 21000 éléments, auxquels s'ajoutent près de 68000 relations de contact-frottement. Il faut alors 3 semaines de calcul pour réaliser une simulation de type IPG. Les résultats obtenus avec ces différents maillages montrent un effet important du raffinement régulier axial et azimutal du maillage sur les déformations viscoplastiques équivalentes et les contraintes radiales dans la gaine au niveau du point triple. Mais les temps de calculs obtenus avec le maillage raffiné de façon plus régulière sont prohibitifs, particulièrement dans un contexte industriel pour lequel des études paramétriques doivent pouvoir être réalisées dans un temps de calcul acceptable (maximum une semaine).

Pour finir, malgré les efforts faits concernant le raffinement du maillage, les tailles de maille minimales atteintes sont encore loin du micron, objectif fixé afin de modéliser précisément les phénomènes en jeu.

Cette thèse a pour objectif d'essayer de dépasser ces limites et de trouver une méthode de raffinement permettant d'obtenir des maillages plus raffinés localement que ceux utilisés actuellement tout en conservant un temps de calcul et un besoin en espace mémoire acceptables.

## I.2 Cas tests d'application issus de la simulation du combustible nucléaire

Des cas tests de vérification issus des modélisations IPG effectuées dans le code industriel ALCYONE [Marelle et Thouvenin, 2011] sont proposés et seront utilisés tout au long de ce manuscrit afin de vérifier les performances et les limitations de la méthode de raffinement choisie.

Seule la réponse de la gaine est étudiée. La partie élastique de son comportement est caractérisée par le module d'Young  $E = 100$  GPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Le contact avec la pastille est représenté par une pression discontinue au niveau du rayon interne de la gaine.

Les deux phénomènes caractéristiques de l'IPG sont soit modélisés séparément de manière bidimensionnelle (dans le plan  $2D(r,z)$  ou  $2D(r,\theta)$ ) soit réunis dans un problème tridimensionnel complet. Des comportements linéaires et non linéaires de la gaine sont pris en compte.

### I.2.1 Mise en diablo : cas $2D(r,z)$

Le premier cas test est axisymétrique et représente l'effet du phénomène de mise en diablo de la pastille sur la gaine. Dans la suite nous l'appellerons cas  $2D(r,z)$ .

Le contact avec la pastille est représenté par un pic de pression sur  $600 \mu\text{m}$  autour du plan inter-pastille. A l'aide de considérations de symétrie, seule une demi-hauteur de pastille est modélisée, voir figure I.8.

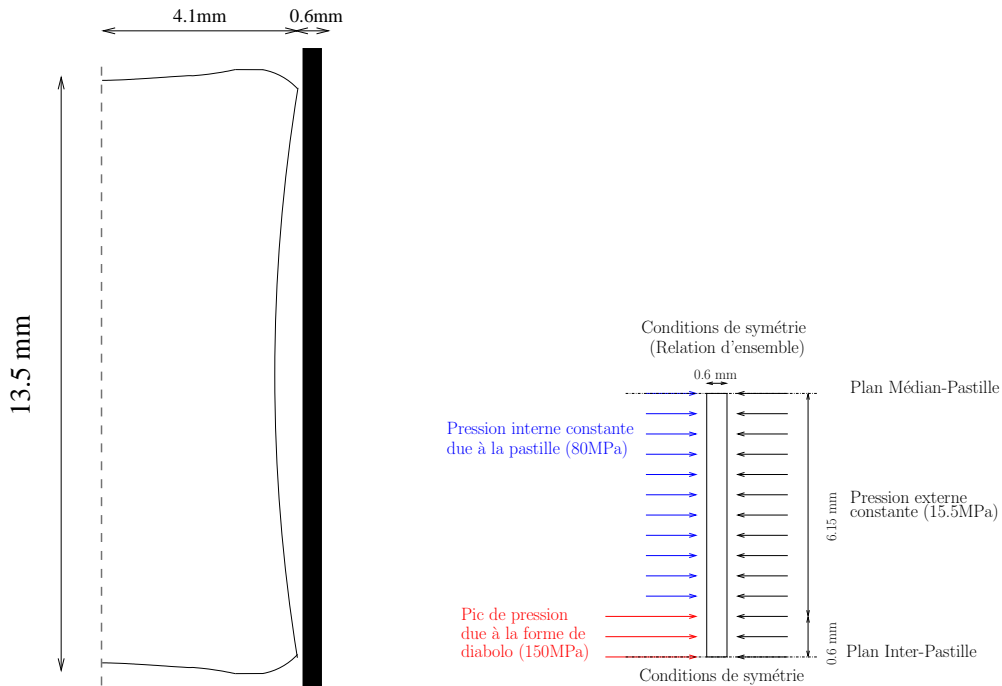


FIGURE I.8 – Définition du problème sur la gaine - Cas  $2D(r,z)$

Le premier avantage de ce cas test est que la géométrie considérée est très simple puisque le domaine d'étude est un rectangle. Des maillages réguliers structurés uniformes (et cartésiens) représentant parfaitement le domaine d'étude réel peuvent donc être utilisés.

Comme il n'existe pas de solution analytique à ce problème, une solution de référence obtenue avec

un maillage très fin (dépendant du comportement mécanique traité et adapté à la discontinuité de pression) est utilisée pour vérifier la précision et l'ordre de convergence de la méthode.

### I.2.2 Fissuration de la pastille : cas 2D( $r, \theta$ )

Le second cas test représente l'effet de la fissuration de la pastille sur le chargement de la gaine en cours d'irradiation et vérifie l'hypothèse des déformations planes généralisées. Dans la suite, ce cas sera appelé le cas 2D( $r, \theta$ ). L'ouverture de la fissure (discontinuité de pression) est placée ici à  $8 \mu\text{m}$ . La pastille étant supposée se fissurer de façon régulière (voir [Nonon *et al.*, 2004] et la figure I.4), seul 1/16 de la gaine est modélisé, voir figure I.9. Comme nous modélisons le phénomène ayant lieu en fonctionnement incidentel, les fragments sont écartés, comme modélisé sur la figure I.9(b) par une discontinuité de pression, contrairement au cas de la figure I.9(a) qui est une observation réalisée après retour à froid.

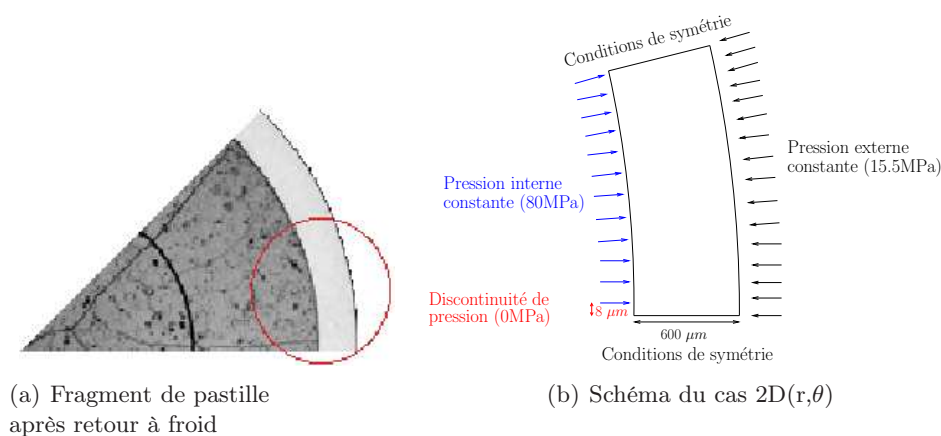


FIGURE I.9 – Définition du problème sur la gaine - Cas 2D( $r, \theta$ )

Quel que soit le maillage éléments finis (EF) isoparamétrique utilisé, la courbure ne peut pas être parfaitement représentée. Le but de cette étude est entre autres de vérifier que l'impact de l'approximation de la géométrie reste négligeable dans le cas de maillages hiérarchiques. En effet, une autre stratégie pourrait consister à utiliser des éléments non imbriqués au niveau de la courbure, mais cela complique les opérations de génération des différents niveaux de grilles [Biboulet *et al.*, 2013]. L'influence d'une singularité plus localisée sera aussi regardée.

Pour ce cas test, une solution analytique existe, voir [Roberts, 1978]. Cependant, cette solution est exprimée sous la forme d'une série de Fourier et le nombre de termes requis afin d'obtenir une solution assez précise devient très vite prohibitif. Comme pour le cas précédent, nous avons donc utilisé une solution de référence obtenue sur un maillage très fin (précisé dans la suite pour chaque étude), adapté à la discontinuité de pression, afin de jouer le rôle de solution analytique dans le processus de vérification.

### I.2.3 Point triple : cas 3D

Ce cas test rassemble les deux problèmes bidimensionnels précédents au sein d'une géométrie tridimensionnelle, afin de représenter les phénomènes ayant lieu au niveau du point triple (voir la figure I.7 p.10, côté gaine). Les buts de cette étude plus poussée sont multiples : vérifier la précision de la méthode de raffinement choisie sur un cas tridimensionnel, confirmer la capacité de la méthode à traiter plusieurs singularités croisées de tailles caractéristiques différentes et apprécier

les performances de la stratégie de raffinement local pour une configuration industrielle plus réaliste. Une limitation importante de ce cas test va reposer sur la précision de la solution de référence. En particulier, une solution calculée sur un maillage de référence uniforme suffisamment fin pour servir de solution de référence ne peut pas être obtenue dans un temps de calcul acceptable. Des maillages non uniformes raffinés localement de façon progressive autour des deux discontinuités de pression devront donc être utilisés pour calculer la solution de référence.

## I.3 Autour des méthodes de raffinement de maillage

### I.3.1 Méthodes de raffinement

Historiquement, les premiers maillages utilisés pour résoudre des problèmes physiques étaient structurés réguliers et souvent uniformes car les géométries étudiées étaient simples. La méthode des différences finies était utilisée pour discrétiser les problèmes et les moyens de calcul étaient limités. Les progrès de la simulation ont permis de modéliser des problèmes et des géométries de plus en plus complexes (avec des EF par exemple). Les maillages résultant, souvent non structurés et non uniformes, permettent une meilleure approximation de la solution, mais nécessitent un temps de calcul important, une place mémoire de plus en plus grande et des calculateurs de plus en plus puissants. De plus, ces maillages sont souvent complexes à générer et nécessitent un temps ingénieur important pour leur mise en œuvre. Ce phénomène a conduit au développement de maillages de plus en plus puissants.

Bien que les maillages raffinés *a priori* soient très utilisés, notamment dans la quasi totalité des codes de calculs industriels, leur caractère généralement non-structuré, non-régulier voire dégénéré a favorisé le développement d'autres stratégies afin de mieux adapter le maillage aux caractéristiques du problème, notamment dans le domaine de la R&D. Deux grands types d'approches se concentrant sur la simplicité de génération du maillage, avec l'utilisation d'un maillage de départ simple, modifié de façon automatique, peuvent être distinguées :

- Tout d'abord, les méthodes adaptatives consistent à enrichir localement le maillage initial en terme de nombres d'éléments ou de degré des fonctions de forme afin de réduire l'erreur de discrétisation du calcul. Cette méthode peut s'appliquer de manière récursive si l'erreur souhaitée n'est pas atteinte. Selon le critère utilisé, des méthodes de déraffinement peuvent également être appliquées dans les zones où l'erreur est faible, de façon à optimiser la répartition des éléments selon l'erreur globale souhaitée. Plusieurs calculs peuvent être nécessaires pour obtenir un maillage adapté, mais au final un seul maillage de calcul sera utilisé.

On distingue quatre grands types de méthodes adaptatives : les méthodes r-adaptatives [Tezuka et Okuda, 1988, Ghosh et Manna, 1993, Cao *et al.*, 2001], h-adaptatives [Demkowicz *et al.*, 1985, Strouboulis et Haque, 1992b, Belytschko et Tabbara, 1993, Fish et Markolefas, 1994, Díez et Huerta, 1999], p-adaptatives [Babuska et Suri, 1987, Düster et Rank, 2001, Barros *et al.*, 2004, Kubatko *et al.*, 2009] et s-adaptatives [Fish, 1992, Yue et Robbins, 2005].

- D'autre part, à partir des méthodes multi-grilles standard [Brandt, 1977, Brandt, 1994], des méthodes multi-grilles locales ont été développées [Hackbusch, 1984, Angot *et al.*, 1992, Khadra *et al.*, 1993, ...], reprenant l'utilisation de plusieurs niveaux de calcul (grilles de différente taille de maille) et le principe des opérateurs de prolongement et de restriction pour passer d'un niveau de grille à l'autre.

Le but des méthodes multi-grilles locales est différent de celui des méthodes multi-grilles standard puisque l'on cherche à faire du raffinement local et non plus du déraffinement pour accélérer le calcul. Le maillage de départ est un maillage grossier, et on définit des grilles fines uniquement locales, dans le sens où elles ne recouvrent pas tout le domaine physique. Le fait d'utiliser plusieurs niveaux de calcul localisés permet de travailler sur des maillages de bonne qualité (souvent réguliers et structurés, voire uniformes). Ainsi, par rapport à l'utilisation d'un seul maillage raffiné, on diminue le nombre de degrés de liberté total et on espère aussi augmenter la rapidité de calcul. Ces méthodes sont donc spécifiques aux problèmes de singularités locales ou contenant des variations d'échelle importantes.

Ces méthodes ont été très utilisées en thermique et en mécanique des fluides

[Angot et Laugier, 1994, Khadra *et al.*, 2000, Belliard et Grandotto, 2003, Coré *et al.*, 2003, Anthonissen *et al.*, 2005, Kramer *et al.*, 2009, Lee *et al.*, 2010, ...] mais assez peu en mécanique des solides [Fuchs, 1986, Watremetz *et al.*, 2007, ...].

Pour ces deux types de méthodes (adaptatives et multi-grilles locales), il est nécessaire de définir les zones où l'erreur est la plus forte, c'est-à-dire les zones où le maillage doit être enrichi. La qualité du maillage obtenu et donc du calcul réalisé est fortement liée à la qualité de la détection de cette zone d'intérêt.

### I.3.1.a Méthodes adaptatives

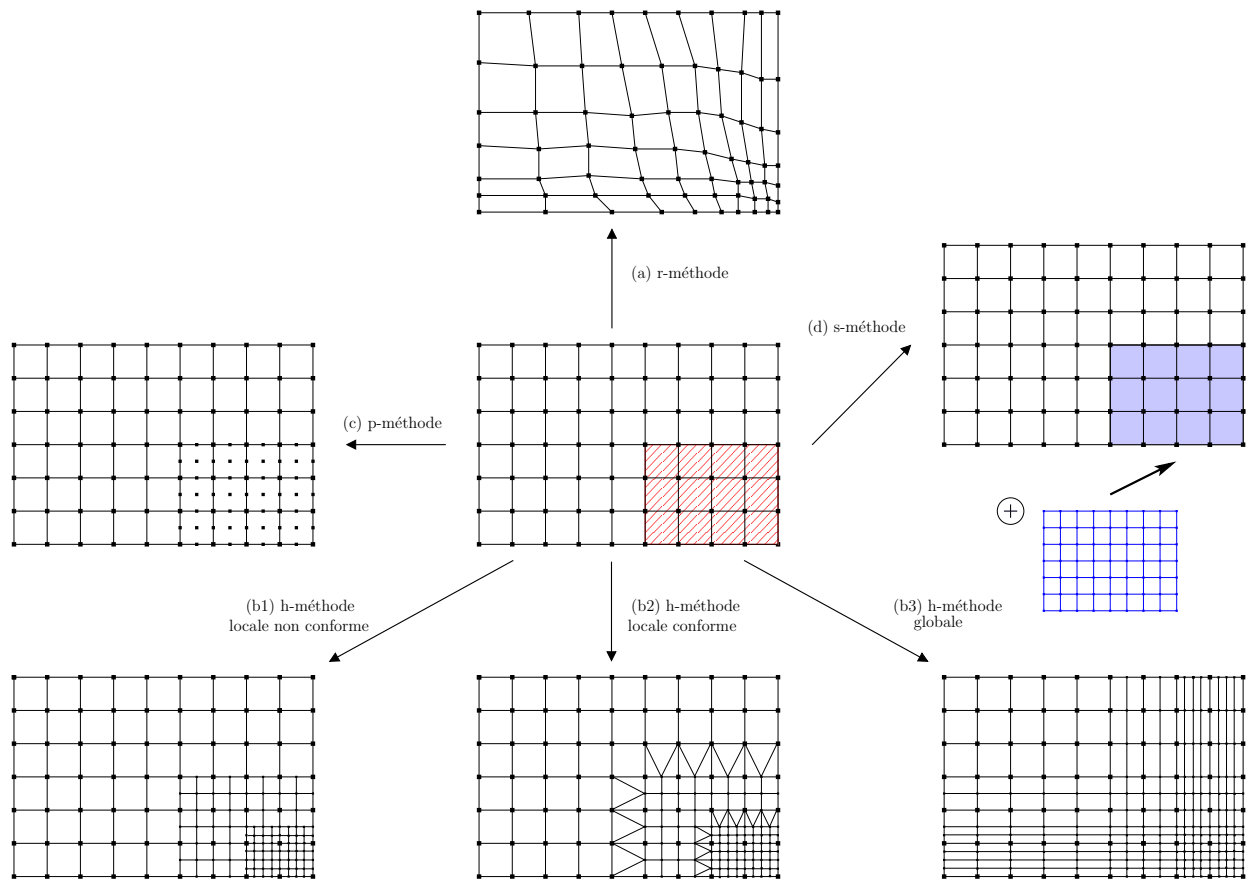


FIGURE I.10 – Méthodes adaptatives, cas bidimensionnel

- Les méthodes r-adaptatives [Tezuka et Okuda, 1988, Ghosh et Manna, 1993, Cao *et al.*, 2001, ...] consistent à optimiser la position des nœuds sur le maillage, en laissant inchangés la connectivité et le nombre de nœuds. Des nœuds sont ainsi déplacés vers les zones où l'erreur est la plus importante (cf. figure I.10(a) par exemple), afin de mieux détecter des phénomènes locaux ou de mieux approximer une géométrie localement complexe. Les avantages de cette méthode sont qu'elle est simple à mettre en œuvre et qu'elle ne modifie pas le nombre de ddl du problème résolu. Cependant, l'amélioration de la précision est limitée par la distorsion des éléments et par le nombre initial de ddl du maillage.
- Les méthodes h-adaptatives font partie des méthodes adaptatives les plus utilisées [Demkowicz *et al.*, 1985, Strouboulis et Haque, 1992b, Belytschko et Tabbara, 1993,

Fish et Markolefas, 1994, Díez et Huerta, 1999, ...]. Pour ces méthodes, des éléments de taille plus fine sont ajoutés au maillage dans les zones où la précision voulue n'est pas atteinte (cf. figure I.10(b)).

La façon la plus naturelle de générer ce type de maillage consiste à diviser les éléments de la zone d'intérêt. Dans ce cas, le maillage obtenu peut être non conforme (cf. figure I.10(b1)), il faut alors définir des relations de non conformité entre les degrés de liberté des différents éléments (voir [Strouboulis et Haque, 1992b] par exemple). Le maillage peut être rendu conforme grâce à l'utilisation d'une zone de transition (cf. figure I.10(b2) et [Strouboulis et Haque, 1992b]). Cependant le mailleur et le solveur utilisés doivent alors autoriser un mélange d'éléments (triangles et quadrangles par exemple). Celle-ci permet d'éviter de gérer les non conformités [Strouboulis et Haque, 1992b]. Ces deux techniques locales surchargent le maillage initial et modifient le conditionnement de la matrice du problème.

La structure peut également être entièrement remaillée à l'aide d'un type d'éléments choisi (cf. figure I.10(b3)) en tenant compte d'une taille de maille locale. Cette méthode est appelée méthode h-adaptative globale [Demkowicz *et al.*, 1985, Díez et Huerta, 1999]. Il est alors utile d'avoir un mailleur respectant la donnée d'une carte de taille de maille, afin d'éviter un travail de remaillage complexe et coûteux en temps ingénieur. La convergence de cette méthode peut cependant être assez lente, car en plus d'avoir des éléments de tailles très différentes, le type d'éléments choisi peut conduire à obtenir des éléments très étirés.

Ces méthodes h-adaptatives permettent de mieux approximer des solutions singulières ou des géométries complexes. Les maillages peuvent être obtenus de façon récursive. Néanmoins, le traitement des maillages obtenus nécessite en général un travail supplémentaire sur le solveur (relations de non conformité, zone de transition, ...) et l'ajout d'éléments conduit rapidement à des maillages contenant de nombreux ddl.

- Les méthodes p-adaptatives sont également très utilisées. Elles consistent à augmenter localement le degré d'interpolation des fonctions de base [Babuska et Suri, 1987, Düster et Rank, 2001, Barros *et al.*, 2004, Kubatko *et al.*, 2009, ...]. Cela permet de mieux approximer les solutions d'ordre élevé tout en conservant la topologie du maillage (cf. figure I.10(c)). Cependant, la géométrie et les caractéristiques du problème doit pouvoir être bien approximée par peu d'éléments [Düster et Rank, 2001] car l'augmentation du degré des fonctions de forme ne permet pas d'améliorer l'approximation de la géométrie du problème. Cette méthode ne semble donc pas adaptée aux cas de singularités locales. De plus, l'implantation de cette méthode dans un code de calcul industriel nécessite de savoir gérer des éléments d'ordres différents et est limitée par le degré d'interpolation maximal autorisé par ce code.
- Enfin, dans les méthodes s-adaptatives [Fish, 1992, Yue et Robbins, 2005, ...] des maillages additionnels de pas plus fin sont ajoutés dans les zones d'intérêt (cf. figure I.10(d)). Un nouveau problème est défini [Fish, 1992], contenant le problème résolu sur chacun des maillages et le couplage entre ces différents niveaux. Ces méthodes s'apparentent aux méthodes multi-grilles locales, qui seront exposées dans la suite (cf. section I.3.1.c), mais le problème composite complet est assemblé avant d'être résolu. L'avantage de cette méthode est que des maillages structurés réguliers peuvent être utilisés sur chaque niveau. Son principal inconvénient est que le problème résolu contient l'ensemble des degrés de liberté des différents niveaux, il est donc très vite de grande dimension.

Ces méthodes adaptatives peuvent être combinées afin de cumuler leurs avantages. C'est par exemple le cas des méthodes hr-adaptatives [Sun et Zamani, 1992, Edwards *et al.*, 1993, Askes et Rodriguez-Ferran, 2001, ...] ou des méthodes hp-adaptatives, développées dans la série d'articles [Demkowicz *et al.*, 1989, Oden *et al.*, 1989, Rachowicz *et al.*, 1989]. Ces dernières sont actuellement les plus répandues, en thermo-hydraulique [Devloo *et al.*, 1988, Oden et Demkowicz, 1991, ...], en neutronique [Lebrun-Grandié *et al.*, 2011, Fournier *et al.*, 2011,

...] ou encore en mécanique des solides [Düster *et al.*, 2007, Solin *et al.*, 2010, ...].

Dans le cas des méthodes hp-adaptatives, un raffinement spatial est effectué et le degré polynomial de certains éléments est augmenté, afin d'améliorer la précision des résultats. Le couplage des deux méthodes permet à la fois de mieux approximer la solution lorsqu'elle est singulière et lorsqu'elle est régulière d'ordre élevé. La principale difficulté de la méthode réside dans le choix du raffinement pour chaque zone du problème et dans leur combinaison. Les moyens utilisés pour y parvenir sont souvent heuristiques et dépendant du problème traité. En général, les deux types de raffinement sont appliqués successivement. Le point-clé de la méthode consiste à définir un critère permettant d'arrêter la première méthode de raffinement pour passer à la seconde, afin d'obtenir un raffinement optimal.

### I.3.1.b La méthode Arlequin mixte

Cette méthode, dérivée des méthodes s-adaptatives, a été développée à la fin des années 90 [Ben Dhia, 1998, Ben Dhia et Rateau, 2001, Ben Dhia, 2008] pour traiter des problèmes multi-échelles ou multi-modèles [Bauman *et al.*, 2008, Biscani *et al.*, 2011, Hu *et al.*, 2010] liés à la mécanique des solides. Elle consiste à superposer deux domaines (cf. figure I.11), qui peuvent avoir un raffinement différent ou même un comportement différent (par exemple un modèle 1D et un modèle 3D, ou un modèle atomistique et un modèle continu). Ceux-ci sont raccordés du point de vue des déplacements et des déformations, sur leur zone de recouvrement, à l'aide de multiplicateurs de Lagrange.

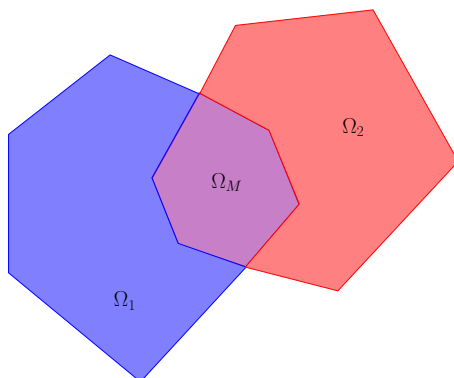


FIGURE I.11 – Méthode Arlequin : superposition des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et zone de recouvrement  $\Omega_M$

La formulation Arlequin du problème permet donc d'obtenir sur la zone de recouvrement une solution qui peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des deux solutions obtenues sur chaque domaine distinct. Cette méthode présente les mêmes limitations que les méthodes s-adaptatives (notamment le traitement d'un problème composite contenant tous les ddl du problème).

L'existence et l'unicité de la solution de ce problème continu et du problème discrétisé associé ont été prouvées dans [Ben Dhia et Rateau, 2001], pour un comportement élastique linéaire. De plus, cette méthode a été mise en place dans le code EF ABAQUS [Qiao *et al.*, 2011].

### I.3.1.c Méthodes multi-grilles locales

Les méthodes multi-grilles locales (MGL) [Berger et Oliger, 1984, Hackbusch, 1985, Khadra *et al.*, 1996, Borrel *et al.*, 2006, ...] (ou multi-niveaux), peuvent être vues comme



une méthode de s-raffinement pour laquelle les problèmes définis sur chaque grille sont résolus séparément. Un processus multi-grille (MG) [Brandt, 1977] basé sur des opérateurs de prolongement et de restriction permet de relier entre elles les solutions sur chaque niveau. Les problèmes sur les différents niveaux sont résolus de façon récursive jusqu'à ce qu'un test de convergence soit vérifié ou jusqu'à un nombre d'itérations fixé à l'avance (en général, quelques itérations suffisent).

Dans l'approche multi-grille standard (cf. Annexe A), la convergence d'un calcul à fort nombre de ddl est accélérée en utilisant des maillages additionnels déraffinés. Pour cela, les solutions des différents niveaux de calcul sont progressivement lissées de façon récursive, jusqu'à atteindre la convergence de la solution la plus fine.

Le processus multi-grille local consiste à raffiner le problème de façon locale. Il part donc d'une grille grossière globale (généralement non adaptée aux caractéristiques du problème) définie sur l'ensemble du domaine et travaille récursivement sur des sous-grilles locales (définies sur des sous-domaines) de pas de maillage de plus en plus fin. Les cycles sont alors inversés par rapport au multi-grille standard. La génération des sous-niveaux s'arrête lorsqu'une précision ou une taille de maille locale données sont atteintes.

Pour des problèmes à singularités locales, l'avantage évident des approches multi-grille locales par rapport aux approches multi-grille standards est un gain en termes d'espace mémoire et de temps de calcul, les maillages étant plus localisés dans la première approche. Pour les deux techniques, la précision de la solution finale est fortement dépendante de la précision des opérateurs de projection (restriction et prolongement). Aucune contrainte n'existe *a priori* concernant le type de maillages (éléments, régularité, structuration, ...) ou le solveur utilisé sur les différents niveaux (voir [Borrel *et al.*, 2006] par exemple).

Plusieurs méthodes multi-grilles locales ont été développées, qui se distinguent par l'opérateur de restriction défini afin de corriger les solutions grossières. L'étape de prolongement commune consiste à définir les conditions aux limites (CL) du problème fin local à partir de la solution immédiatement plus grossière.

Dans la méthode "Local Defect Correction" (LDC) [Hackbusch, 1984], l'étape de restriction consiste à corriger le problème grossier via un résidu calculé sur la zone de recouvrement à partir de la solution immédiatement plus fine. Ce résidu est issu de la méthode multi-grille standard FAS [Brandt, 1977]. Cette méthode peut être utilisée avec tout type de discrétisation (cf. par exemple [Ferket et Reusken, 1996, Anthonissen *et al.*, 1998, Wappler, 1999, ...]), mais elle nécessite une zone de raffinement assez large, car elle fait intervenir une zone dite "de sécurité" sur le bord de la zone raffinée. Sur cette zone, le problème grossier n'est pas corrigé, alors qu'il a pourtant été raffiné et ceci afin de ne pas être trop pollué par l'erreur des CL projetées. La méthode LDC a été appliquée avec succès à différents types de physiques (par exemple l'équation de transport [Kramer *et al.*, 2009], la convection-diffusion [Minero *et al.*, 2006], la thermohydraulique d'un milieu biphasique [Belliard et Grandotto, 2003] ou les équations de la combustion [Anthonissen *et al.*, 2005]) et sa convergence théorique a été étudiée dans [Hackbusch, 1985] et [Ferket et Reusken, 1996].

La méthode "Fast Adaptive Composite" (FAC) [McCormick, 1984] consiste à définir un problème intermédiaire composite entre chaque niveau de grille. Celui-ci contient les nœuds de la grille immédiatement plus fine, complétés par les nœuds de la grille immédiatement plus grossière sur la zone non raffinée. Ce problème sert alors de problème grossier pour la grille immédiatement plus fine et de problème fin pour la grille immédiatement plus grossière. L'opération de restriction consiste à calculer un résidu composite sur ce problème intermédiaire, qui permet de corriger simultanément les solutions fine et grossière. Cette méthode a été principalement appliquée à des problèmes linéaires [Lemke et Quinlan, 1992, Ritter *et al.*, 2010]. Elle peut facilement être distribuée sur des architectures parallèles [Lemke et Quinlan, 1992], mais cela induit une convergence de la méthode (en termes de nombre d'itérations) plus lente. Son principal inconvénient réside dans

le fait de devoir traiter un problème composite et notamment la gestion des interfaces entre deux niveaux de maillages. Par exemple, dans le cas d’une discrétisation conservative, cette méthode nécessite de définir des volumes de contrôle regroupant deux niveaux de mailles, sur lesquels le bilan de conservation des flux doit être vérifié. La généralisation multi-niveaux de cette méthode consiste à définir récursivement les grilles composites associées au système de grilles classiques généré. La convergence de cette méthode a été étudiée dans [McCormick, 1994, Ferket, 1996]. Enfin, la méthode “Flux Interface Correction” (FIC) [Angot *et al.*, 1992, Khadra *et al.*, 1993] est basée sur un principe de conservation des flux entre les sous-niveaux. Elle est dédiée aux méthodes de discrétisations conservatives des équations, comme la méthode des Volumes Finis par exemple. C’est pourquoi elle a été quasi exclusivement utilisée pour simuler des problèmes de mécanique des fluides [Angot et Laugier, 1994, Coré *et al.*, 2003, Ramière *et al.*, 2007b]. Une justification de la méthode est proposée dans [Khadra, 1994]. Le résidu local sur la zone de correction est calculé sur chaque face des volumes de contrôle du niveau grossier à partir de la différence de flux sur ces faces entre le niveau immédiatement plus fin et le niveau grossier. Plusieurs variantes de la méthode existent selon la zone de correction utilisée (ensemble des volumes de contrôle de la zone de recouvrement ou faces des volumes de contrôle situés aux interfaces entre deux niveaux).

Une autre approche multi-grille locale [Cavin *et al.*, 2005, Watremetz *et al.*, 2007, Biotteau *et al.*, 2010] a été développée plus récemment. Elle est basée sur le processus multi-grille très connu Full Multi-Grid (FMG, voir [Brandt, 1994, Carre et Dervieux, 1999] ou l’annexe A par exemple). Le FMG permet d’améliorer la vitesse de convergence du MG, en partant d’un maillage grossier et en effectuant une résolution multi-grille progressive. Ainsi, chaque nouveau niveau de calcul est ajouté lorsque l’ensemble des niveaux précédents ont convergé. Cette méthode peut donc être vue comme une méthode de raffinement global. Les opérateurs utilisés pour le FMG sont les mêmes que ceux du multi-grille standard (cf. algorithme FAS en annexe A). L’approche de [Watremetz *et al.*, 2007, Biotteau *et al.*, 2010] consiste à appliquer le cycle FMG de façon locale. L’opérateur de restriction de la méthode FMG locale est donc le même que celui de la méthode LDC mais l’opérateur de prolongement provient à la fois des méthodes MG standard (prolongement de la correction grossière) et des méthodes MGL classiques (projection de la solution grossière pour définir les CL du problème fin). L’intérêt de cette méthode repose sur le lissage progressif des niveaux, ce qui évite une résolution directe sur les maillages fins, éventuellement coûteuse.

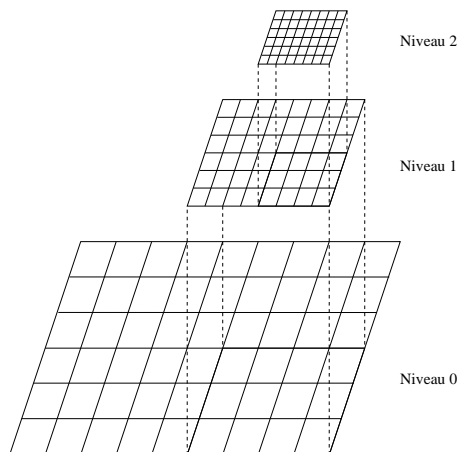


FIGURE I.12 – Exemple de grilles emboîtées utilisées dans les méthodes multi-grilles locales

### I.3.2 Estimateurs d'erreur *a posteriori*

Quelle que soit la méthode de raffinement choisie, il est nécessaire de pouvoir détecter les zones ou les éléments à raffiner (ceux pour lesquels l'erreur est forte). Lorsque le problème est bien connu (géométrie, singularités, évolution), les zones à raffiner peuvent être déterminées *a priori*. Une autre approche, beaucoup moins dépendante de la connaissance de l'utilisateur, consiste à utiliser des estimateurs d'erreur *a posteriori*.

#### I.3.2.a Généralités sur les estimateurs d'erreur *a posteriori*

La résolution numérique d'un problème physique entraîne plusieurs types d'erreur :

- l'erreur de modélisation qui est due à la modélisation mathématique du problème physique. En effet, les hypothèses utilisées pour pouvoir mener à bien la résolution du problème (équations, CL, propriétés des matériaux, ...) peuvent ne pas tenir compte de certains phénomènes physiques complexes.
- l'erreur de discrétisation qui est due à l'utilisation des méthodes numériques pour résoudre le système d'équations obtenu. Le modèle continu étant discrétisé en espace et en temps, les degrés de liberté choisis ne permettent pas en général de décrire toutes les informations contenues dans les équations aux dérivées partielles continues.
- l'erreur numérique qui est due d'une part à la précision machine de l'ordinateur utilisé et d'autre part à la tolérance permise sur la résolution (précision du solveur, couplage, ...).

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* se focalisent sur l'erreur de discrétisation. Ils permettent de mesurer après le calcul cette erreur.

Les estimateurs présentés dans la suite de cette section se focalisent sur le problème de la discrétisation spatiale, puisque nous nous intéressons dans cette thèse au raffinement spatial. Le lecteur pourra se reporter à [Delmas, 2008] pour plus de détails sur les estimateurs d'erreurs de discrétisation spatiale. Ces estimateurs sont généralement appliqués sur des problèmes d'évolution afin d'estimer l'erreur de discrétisation spatiale à un temps donné. Néanmoins, lorsque l'erreur de discrétisation en temps devient importante, un estimateur d'erreur *a posteriori* temporel peut s'avérer nécessaire afin de contrôler également le raffinement temporel.

Une revue très complète des estimateurs d'erreur applicables à la méthode des éléments finis a été faite dans [Ainsworth et Oden, 1997]. Concernant la mécanique des solides, la plupart des estimateurs d'erreur existants ont été initialement développés pour des problèmes linéaires [Babuska et Rheinboldt, 1978, Ladevèze et Leguillon, 1983, Zienkiewicz et Zhu, 1987, Zienkiewicz et Zhu, 1992a, Zienkiewicz et Zhu, 1992b, Coorevits *et al.*, 1995, ...]. Leur application a ensuite été étendue aux problèmes non linéaires (voir [Gallimard *et al.*, 1996, Wriggers et Scherf, 1998] par exemple). Une revue des estimateurs d'erreur *a posteriori* concernant la mécanique des solides, et en particulier des méthodes applicables aux problèmes non linéaires ou dépendant du temps a été faite dans [Gratsch et Bathe, 2005].

#### Définition de l'erreur de discrétisation

L'erreur de discrétisation  $e_h$  est par définition la différence entre la solution  $u$  du problème variationnel et son approximation  $u_h$  obtenue par discrétisation. Cette erreur vérifie la propriété d'orthogonalité, c'est-à-dire qu'elle est solution d'un problème équivalent au problème discrétisé, dont le second membre est nul. Trouver l'erreur de discrétisation est donc aussi coûteux à résoudre que le problème initial. C'est pourquoi seules des estimations de l'erreur vont être recherchées afin de trouver les zones du maillage où la précision de la solution n'est pas satisfaisante.

### Définition des estimateurs d'erreur *a posteriori*

Comme la solution analytique  $u$  est inconnue en général (sauf pour des cas académiques simples) et le calcul de  $e_h$  est coûteux, l'objectif est donc de déterminer une estimation de cette erreur. Un estimateur d'erreur *a posteriori* est une fonction  $\eta(h, u_h, d)$  qui encadre l'erreur de discrétisation, en notant  $h$  le pas du maillage et  $d$  un ensemble de données du problème. Dans le cas où  $\eta(h, u_h, d)$  peut être localisé, on peut définir  $\eta$  comme la somme de quantités locales  $\eta_\omega(h, u_h, d)$  représentant les contributions élémentaires de l'estimation de l'erreur globale. Ces quantités sont appelées estimateurs locaux d'erreur. Ce sont eux qui sont utilisés en pratique dans les procédures d'adaptation de maillage.

### Qualité des estimateurs

On définit l'indice d'efficacité  $\gamma$  d'un estimateur d'erreur *a posteriori* comme le rapport entre l'estimateur d'erreur *a posteriori*  $\eta(h, u_h, d)$  et l'erreur de discrétisation  $e_h$ . En pratique, l'indice d'efficacité ne peut être établi que sur des cas test académiques ou extrêmement simples (solution analytique connue ou possibilité de faire un maillage très fin). Un bon estimateur doit avoir un indice d'efficacité proche de 1. De plus, si l'indice d'efficacité d'un estimateur tend vers 1 quand la taille des éléments tend vers 0, l'estimateur est dit asymptotiquement exact. Enfin, pour être fiable comme critère d'arrêt dans un processus adaptatif, il doit légèrement surestimer l'erreur ( $\gamma > 1$ ). Ainsi, lorsque l'estimateur d'erreur est inférieur à une valeur seuil donnée, l'erreur de discrétisation l'est aussi.

### I.3.2.b Principaux estimateurs d'erreur *a posteriori* en mécanique des solides

#### Position du problème

On se focalise ici sur le problème d'élasticité linéaire à partir duquel la majorité des estimateurs suivants ont été développés.

Soit un solide élastique qui occupe un domaine  $\Omega$  de frontière assez régulière  $\Gamma$  et de normale sortante  $\mathbf{n}$ . La frontière du domaine est définie comme l'union de deux parties disjointes  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_F$  ( $\Gamma_U \cup \Gamma_F = \partial\Omega$  et  $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset$ ).

Alors le problème à résoudre peut s'exprimer sous la forme :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega & \text{(I.1a)} \\ \sigma = C : \epsilon(u) & \text{dans } \Omega & \text{(I.1b)} \\ \epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad}^T(\mathbf{u})) & & \text{(I.1c)} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Gamma_U & \text{(I.1d)} \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \Gamma_F & \text{(I.1e)} \end{cases}$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de déplacement,  $\sigma$  est le champ de contrainte,  $\epsilon$  est le champ de déformation et  $\mathbf{f}$  le terme source.

$C$  est le tenseur d'élasticité ayant les propriétés usuelles de symétrie et de positivité. Ainsi, en utilisant la notation d'Einstein :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} = C_{klij} \\ \exists c > 0, \quad C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} &> c \|\epsilon\|^2 \end{aligned}$$

De plus, toujours en utilisant les notations d'Einstein, on a par définition des opérateurs : et . :

$$\begin{aligned}(C : \varepsilon)_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ (\sigma \cdot \mathbf{n})_i &= \sigma_{ij} \mathbf{n}_j\end{aligned}$$

On suppose de plus que les efforts  $\mathbf{F}$  auxquels est soumis la structure sont suffisamment réguliers. Sous ces hypothèses, le problème admet alors une solution unique.

Le couple solution du problème est un couple  $(\tilde{u}, \tilde{\sigma})$  où  $\tilde{u}$  est un champ de déplacement dit cinématiquement admissible et  $\tilde{\sigma}$  est un champ de contrainte dit statiquement admissible. Un champ de déplacement est dit cinématiquement admissible s'il est dérivable, vérifie l'équation (I.1c) et est tel que les CL en déplacement du problème (I.1d) sont vérifiées. Un champ de contrainte est dit statiquement admissible s'il vérifie l'équilibre (I.1a) et les CL en effort (I.1e). Le couple solution vérifie de plus la relation de comportement (I.1b).

Dans le cadre de la méthode des éléments finis standard, le problème est résolu en déplacement et le champ de contraintes est évalué à partir de ce déplacement. Ainsi, le couple solution obtenu est cinématiquement admissible mais n'est pas statiquement admissible localement. Cependant, l'admissibilité statique globale est respectée.

### Estimateur générique basé sur la comparaison de deux raffinements

Ces estimateurs [Bergallo *et al.*, 2000, Stein *et al.*, 2004, Watremetz *et al.*, 2007, Biotteau, 2010] ne sont pas spécifiques à la mécanique des solides. En effet, ils sont basés sur la propriété de convergence en maillage de la méthode de discrétisation choisie. Ainsi, l'erreur de discrétisation obtenue sur un maillage fin est systématiquement plus petite que l'erreur de discrétisation obtenue sur un maillage grossier. Le calcul est alors réalisé indépendamment sur deux maillages du même domaine avec un rapport de pas de maillage égal à  $n$ . On estime l'erreur de discrétisation en comparant les deux solutions obtenues.

Cette méthode est coûteuse car il faut faire un calcul plus fin afin d'estimer l'erreur de discrétisation d'un calcul grossier. L'avantage de cet estimateur "basique" est qu'on est sûr d'obtenir une bonne estimation de l'erreur de discrétisation si  $n$  est suffisamment grand.

### Critères basés sur les résidus d'équilibre

Ces critères issus de [Babuska et Rheinboldt, 1978] reposent sur le fait que le champ de contraintes obtenu par la méthode des éléments finis ne vérifie pas localement l'équilibre (équation (I.1a)) sur les nœuds du maillage. L'erreur commise sur le champ de contraintes est estimée à partir des résidus d'équilibre sur chaque élément. Ce résidu mesure à la fois la non vérification de l'équation de l'équilibre et les sauts de contrainte aux interfaces. L'erreur en déplacement est alors solution du problème élastique dont le terme source correspond aux résidus d'équilibre.

Deux types d'estimateurs basés sur les résidus d'équilibre existent. Le premier type est appelé estimateur explicite et donne une information sur l'erreur de discrétisation globale en majorant les résidus d'équilibre, alors que la seconde méthode qualifiée d'implicite permet d'obtenir des estimations locales de l'erreur de discrétisation en résolvant des sous-problèmes locaux.

Les estimateurs explicites sont des estimateurs fiables au sens où ils surestiment l'erreur de discrétisation, mais sont généralement pessimistes car ils sont basés sur une majoration de l'erreur sur tout le domaine. De plus, comme ils ne fournissent une estimation que de l'erreur globale, ils ne peuvent pas être utilisés pour raffiner localement un maillage.

La version implicite fournit une estimation précise de l'erreur de discrétisation locale. L'inconvénient majeur de cette méthode est le coût de résolution des sous-problèmes auxiliaires. Des développements plus récents ont été réalisés afin de diminuer le coût de calcul de cet estimateur (voir [Pares *et al.*, 2006] par exemple).

### Critères basés sur la relation de comportement

Ces critères sont basés sur la résolution d'un problème équivalent permettant d'assurer l'admissibilité du champ de contrainte localement. Ils ont été développés dans les années 80 [Ladevèze et Leguillon, 1983] et d'abord appliqués à l'élasticité linéaire [Coorevits *et al.*, 1995]. Des développements récents dans le domaine de l'élastoplasticité [Gallimard *et al.*, 1996], de la plasticité [Gallimard *et al.*, 2000] et de la viscoélasticité [Chamoin et Ladevèze, 2008] ont été publiés.

L'idée est de déterminer un couple formé d'un champ de déplacement cinématiquement admissible et d'un champ de contrainte statiquement admissible. On mesure alors l'erreur commise par ce couple sur la relation de comportement afin de construire l'estimateur d'erreur. Le champ de déplacement cinématiquement admissible est celui obtenu via la résolution EF du problème. La principale difficulté de la méthode réside donc dans l'obtention du champ de contrainte vérifiant l'équilibre en tout point. Il est obtenu en résolvant un problème équivalent permettant d'assurer l'admissibilité statique du vecteur contrainte. Ce problème est cependant difficile à définir et non trivial à résoudre. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [Gallimard *et al.*, 1996]. Des développements récents permettent d'accélérer la résolution de ce problème [Parret-Fréaud *et al.*, 2010].

L'estimateur d'erreur basé sur l'erreur en relation de comportement est un majorant de l'erreur de discrétisation et il est asymptotiquement exact. Il peut donc être utilisé dans un processus adaptatif. Néanmoins, sa mise en œuvre est coûteuse car un problème supplémentaire doit être résolu. Il permet cependant d'obtenir des bornes garanties de l'erreur, même si celles-ci restent assez larges pour des comportements non linéaires (pour la plasticité par exemple [Ladevèze, 2011]). Cette méthode reste donc peu appliquée dans les codes industriels, mais largement étudiée.

### Critères basés sur le lissage des contraintes

Ces critères, aussi appelés critères de Zienkiewicz et Zhu ou ZZ [Zienkiewicz et Zhu, 1987], consistent à construire une solution en contrainte  $\sigma^*$  plus régulière que celle, notée  $\sigma_h$ , reconstruite à partir de la solution EF en déplacement  $u_h$ . Cette solution lissée est supposée être une meilleure approximation de la solution réelle. L'estimateur local est alors obtenu en moyennant sur chaque élément les écarts nodaux entre les deux champs de contrainte. Deux méthodes principales permettent d'obtenir  $\sigma^*$ . La première méthode décrite dans [Zienkiewicz et Zhu, 1987] consiste à rechercher  $\sigma^*$  comme une combinaison linéaire des valeurs de  $\sigma_h$ . Par exemple, la valeur de  $\sigma^*$  au nœud  $i$  peut être obtenue en effectuant une moyenne pondérée des valeurs de la contrainte  $\sigma_h$  aux points de Gauss voisins du nœud  $i$ . Cette méthode est simple et peu coûteuse. Cependant, elle est peu performante sur des maillages grossiers ou pour une discrétisation avec des éléments d'ordre élevé [Strouboulis et Haque, 1992a].

La deuxième méthode [Zienkiewicz et Zhu, 1992a, Zienkiewicz et Zhu, 1992b] appelée "Super Convergent Patch Recovery" repose sur la notion de patch d'éléments, qui est une union de plusieurs éléments. Elle consiste à définir sur chaque patch une fonction polynomiale minimisant l'écart au sens des moindres carrés à la solution EF  $\sigma_h$  sur un ensemble de points dits "superconvercents". Par exemple, en 1D, ces points correspondent aux points de Gauss. Les contributions des différents patches sont ensuite moyennées afin d'obtenir la solution approchée  $\sigma^*$  sur les nœuds. Cette méthode est plus coûteuse que la première version, mais reste largement moins coûteuse et plus simple à mettre en œuvre que les autres méthodes, tout en permettant d'obtenir de très bons résultats.

La convergence asymptotique de ce dernier estimateur a été démontrée théoriquement pour un problème linéaire 1D dans [Zienkiewicz et Zhu, 1992b]. Cependant, il n'offre pas de garantie sur les bornes de l'erreur, mais seulement une estimation dont le domaine de validité est assez restreint. Il peut être exprimé en énergie et ainsi être étendu à de nombreux types de comportement. Son rapport qualité/coût le rend très utilisé dans les processus d'adaptation de maillage [Bouillard *et al.*, 1996, Fuenmayor *et al.*, 1997, Wriggers et Scherf, 1998, Murthy et Mukhopadhyay, 2000, Kunert et Nicaise, 2003, Boussetta *et al.*, 2006, ...]. Il a en par-



ticulier été rendu disponible dans des codes industriels, comme Code\_Aster [Desroches, 2009, Delmas, 2011] ou CAST3M [CAST3M, 2013].

### I.3.2.c Erreur de pollution

Dans une optique de processus adaptatif de raffinement de maillage, il a été montré que sur une région donnée  $\omega_0$ , l'erreur de discrétisation peut être bornée par la somme de deux termes [Babuska *et al.*, 1994].

Le premier terme est déterminé par la méthode de discrétisation choisie et par la régularité de la solution dans la zone  $\omega_0$  et son environnement proche. C'est l'erreur de discrétisation locale, qui est estimée par les estimateurs d'erreur *a posteriori* présentés précédemment.

Le deuxième terme est l'erreur de pollution, qui regroupe les erreurs de discrétisation d'origine plus lointaine (influence de la régularité de la solution en dehors de la zone  $\omega_0$ , des CL, ...) et qui peut devenir prépondérante par rapport à l'erreur de discrétisation locale.

Cette erreur de pollution a en particulier été étudiée dans [Babuska *et al.*, 1994]. Dans cet article, les auteurs montrent que les estimateurs d'erreur standard (tels que les estimateurs d'erreur *a posteriori* basés sur les résidus d'équilibre et ceux basés sur le lissage des contraintes) ne permettent pas de détecter cette erreur de pollution. De plus, cette erreur de pollution sur  $\omega_0$  ne diminue pas avec le raffinement local de maillage, contrairement à l'erreur de discrétisation locale. L'erreur de discrétisation sur  $\omega_0$  va donc finir par stagner malgré la diminution du pas d'espace.

Une première solution pour s'affranchir de l'erreur de pollution consiste à adapter le maillage de façon globale à partir de l'estimation *a posteriori* de l'erreur de discrétisation locale. En effet, il est montré dans [Babuska *et al.*, 1994] que dans ce cas, l'effet de l'erreur de pollution devient négligeable.

Si on veut faire du raffinement local (h-adaptatif ou p-adaptatif par exemple), il peut alors s'avérer nécessaire de tenir compte de cette erreur de pollution afin d'obtenir un raffinement efficace et optimal. Pour cela, un estimateur de l'erreur de pollution a entre autres été proposé dans [Oden et Feng, 1996]. Les auteurs montrent dans cette étude que dans le cas général, la part de l'erreur de pollution est faible par rapport à l'erreur de discrétisation locale. Cependant, en raffinant récursivement le maillage, l'erreur de discrétisation locale finit par devenir inférieure à l'erreur de pollution d'où l'utilité également d'un estimateur de l'erreur de pollution pour guider une stratégie adaptative. Il faut cependant noter que le temps de calcul nécessaire à l'évaluation de l'erreur de pollution est équivalent à celui nécessaire au calcul de l'estimateur d'erreur *a posteriori* local.

## I.3.3 Choix de la méthode

Dans cette étude, les problèmes à étudier sont issus de situations industrielles possédant plusieurs singularités locales de tailles caractéristiques différentes (voir section I.2). L'utilisation d'un maillage uniforme du domaine avec la taille de maille minimale nécessaire n'est pas envisageable du fait du nombre important de ddl impliqués, même pour une méthode de type multi-grille standard où quelques itérations de lissage doivent quand même être effectuées sur le maillage fin. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser des méthodes de raffinement. De plus, l'une des principales contraintes de ce travail était de proposer une stratégie de raffinement pouvant être facilement implantée dans n'importe quel code de calcul existant. Pour cela, nous avons donc besoin d'une méthode qui puisse considérer le solveur comme une "boîte noire" et travailler uniquement sur des opérations de pré et post-traitement. Les méthodes de h-raffinement local, p-raffinement et s-raffinement ne respectent pas cette exigence. De plus, afin d'être le moins possible limités par

l'espace mémoire nécessaire à chaque résolution et ainsi atteindre les tailles de mailles souhaitées, nous avons décidé d'utiliser des méthodes multi-grilles locales. Parmi les méthodes multi-grilles locales existantes, la méthode LDC [Hackbusch, 1984] a été choisie car elle semble être la plus adaptée aux problèmes de mécanique du solide (résolution par la méthode des éléments finis) avec singularités locales. Comme les sous-niveaux devraient être localisés (petit nombre de ddl sur chaque sous-niveau), la résolution du problème sur ces niveaux devrait être peu coûteuse.

Les méthodes multi-grilles locales (MGL) permettent d'utiliser tous les outils numériques d'un code de calcul en "boîte noire". Ainsi, ces méthodes peuvent être combinées avec tout type d'indicateur d'erreur (estimateur d'erreur *a posteriori*, connaissance *a priori* du problème, ...).



## Conclusion

L'Interaction Pastille-Gaine (IPG) est un phénomène qui peut avoir lieu sous irradiation lors de transitoires incidentels dans les Réacteurs à Eau sous Pression et qui peut conduire à la fissuration de la gaine contenant le combustible nucléaire. Comme la gaine est la première barrière de confinement des produits de fission, la gestion actuelle du parc nucléaire consiste à imposer des marges de sûreté en limitant les transitoires de fonctionnement du réacteur. La simulation précise de l'IPG pourrait permettre d'optimiser les conditions d'exploitation et d'augmenter la robustesse du combustible. Encore actuellement, malgré l'utilisation d'un raffinement local, des limitations numériques empêchent de réaliser des calculs sur des maillages assez fins pour représenter les phénomènes physiques mis en jeu dans l'IPG, et en particulier une approche locale de l'endommagement. En effet, la dimension caractéristique des phénomènes modélisés (de l'ordre du micron) est 10000 fois plus petite que la taille de la structure (de l'ordre du centimètre). L'utilisation de méthodes de raffinement local est à l'étude afin de dépasser ces limitations. Parmi les méthodes existantes, la méthode Local Defect Correction a été choisie car elle semble bien adaptée aux problèmes de singularités locales, requiert un espace mémoire limité et permet potentiellement des gains en temps de calcul. De plus, elle peut facilement être combinée avec n'importe quel solveur et estimateur d'erreur *a posteriori* existant en "boîte noire". Les différentes applications de cette méthode montrent qu'elle permet d'atteindre localement des tailles de mailles très fines. Le but de cette thèse est donc de mettre en place la méthode choisie et d'en quantifier les performances numériques, en l'appliquant à des cas tests représentatifs des phénomènes à simuler (bidimensionnels et tridimensionnels).



## Chapitre II

# Vérification de la méthode LDC en élasticité linéaire

### Sommaire

---

Introduction . . . . .	<b>31</b>
II.1 La méthode Local Defect Correction (LDC) . . . . .	<b>31</b>
II.1.1 Principe . . . . .	31
II.1.2 Algorithme . . . . .	32
II.1.3 Généralisation multi-niveaux . . . . .	36
II.1.4 Performances de la méthode LDC . . . . .	37
II.2 Application de la méthode LDC à l'élasticité linéaire . . . . .	<b>38</b>
II.2.1 Formulation mécanique du problème . . . . .	38
II.2.2 Choix numériques . . . . .	41
II.2.3 Performances attendues . . . . .	43
II.3 Stratégie multi-niveaux . . . . .	<b>45</b>
II.3.1 Passage de l'algorithme bi-grille à l'algorithme multi-grille . . . . .	45
II.3.2 Cas 2D(r,z) : mise en diabololo . . . . .	49
II.3.3 Cas 2D(r,θ) : fissuration de la pastille . . . . .	54
II.3.4 Conclusion : choix du second membre durant l'étape de prolongement . . . . .	58
II.3.5 Comportement de la méthode LDC en cours de calcul . . . . .	58
II.4 Optimisation des performances par rapport au nombre de sous-niveaux . . . . .	<b>61</b>
II.4.1 Étude du temps CPU . . . . .	61
II.4.2 Étude de l'espace mémoire . . . . .	62
II.4.3 Conclusion : intérêt des sous-niveaux . . . . .	64
Conclusion . . . . .	<b>65</b>

---



## Introduction

Dans cette partie, nous présentons dans un premier temps l'algorithme de la méthode Local Defect Correction. Comme cette méthode a été très peu appliquée en mécanique des solides, son utilisation est tout d'abord vérifiée en élasticité linéaire. Cette étude est également l'occasion de comparer en termes de performances et d'efficacité les deux hypothèses existant pour le choix du second membre durant l'étape de prolongement. Enfin, une première comparaison des performances de la méthode en fonction du nombre de sous-grilles utilisées est réalisée.

Une partie des résultats de cette section ont été publiés dans [Barbié et Ramière, 2012] et [Barbié *et al.*, 2014].

## II.1 La méthode Local Defect Correction (LDC)

Comme indiqué dans la section I.3.3, la méthode LDC a été choisie pour essayer de dépasser les limites actuelles des simulations de l'IPG. Dans ce chapitre, nous allons présenter en détails cette méthode et faire quelques remarques sur ses propriétés de convergence.

### II.1.1 Principe

La méthode LDC [Hackbusch, 1984] est directement basée sur l'algorithme multi-grille standard non linéaire FAS (cf. Annexe A) mais pour des problèmes à singularités locales. L'idée de cette méthode est de faire du raffinement local. Le but du multi-grille local est donc différent du multi-grille standard. Une grille grossière globale est d'abord définie sur l'ensemble du domaine, et des grilles fines sont ajoutées uniquement localement dans les zones où la solution n'est pas suffisamment précise. La figure II.1 montre un exemple de maillages emboîtés. Il faut cependant noter que dans la littérature les maillages ne sont pas forcément hiérarchiques, voir [Nefedov et Mattheij, 2002] par exemple.

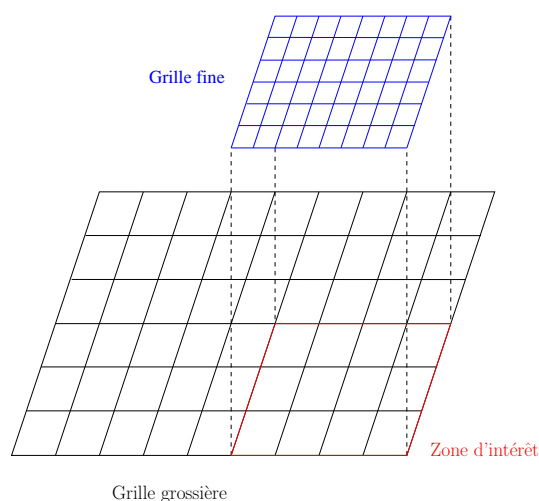


FIGURE II.1 – Exemple de maillages hiérarchiques utilisés dans la méthode LDC

En se basant sur des opérateurs de prolongement et de restriction comme pour le multi-grille standard, les problèmes sont résolus de façon récursive sur chaque niveau de grille jusqu'à ce que la solution ait convergé. Un tel processus itératif est traditionnellement représenté par un  $\wedge$ -cycle,

visible sur la figure II.2.

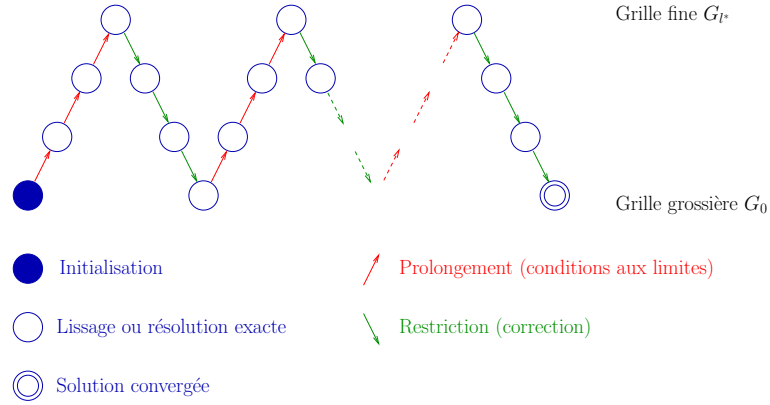


FIGURE II.2 – Représentation du processus multi-grille local pour 4 niveaux de grilles :  $\Lambda$ -cycle

L'opérateur de prolongement transporte des informations d'une grille grossière vers une grille immédiatement plus fine. Il est différent de celui utilisé dans le processus multi-grille standard et consiste à définir les CL de la grille fine à partir de la solution grossière projetée. Dans le cas d'une résolution à l'aide d'un solveur itératif, il peut également s'avérer intéressant de projeter l'ensemble de la solution grossière comme solution de départ des itérations de calcul.

L'opérateur de restriction transporte des informations d'une grille fine vers une grille immédiatement plus grossière, en ajoutant un terme source supplémentaire calculé à partir de la solution fine. Hackbusch a montré dans [Hackbusch, 1984] que contrairement au MG standard, l'opérateur de restriction local n'a pas besoin d'être le transposé de l'opérateur de prolongement pour assurer la convergence.

Par ailleurs, à l'instar des méthodes MG standards, les méthodes multi-grilles locales sont très modulables : le solveur utilisé à chaque niveau est considéré comme une "boîte noire" et peut donc être différent selon les niveaux ou selon les cycles, la résolution peut être exacte ou ne représenter que quelques itérations de lissage. Les éléments utilisés pour mailler le domaine peuvent également différer d'un niveau sur l'autre. Par ailleurs, afin de définir les zones d'intérêt, n'importe quel estimateur peut être utilisé (*a priori*, *a posteriori*, physique du problème, ...).

### II.1.2 Algorithme

L'algorithme suivant est volontairement écrit de façon générique, car il n'est pas spécifique à un type de physique et peut s'appliquer à de nombreux problèmes (mécanique des solides, mécanique des fluides, thermique, ...).

Considérons le problème  $(\mathcal{P})$  défini sur un ouvert  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \mathcal{L}(u) = f & \text{dans } \Omega \\ \text{CL appropriées} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{L} & : \text{opérateur différentiel en espace (généralement non linéaire)} \\ u & : \text{solution} \\ f & : \text{second membre} \end{cases}$$

Les CL sur  $\partial\Omega$  peuvent être de n'importe quel type (Neumann, Dirichlet, ...) tant que le problème  $(\mathcal{P})$  est bien posé.

Un ensemble de domaines imbriqués  $\Omega_l$ ,  $0 \leq l \leq l^*$ ,  $\Omega_l \subset \Omega_{l-1}$ , est défini, avec  $\Omega_0 = \Omega$ . Le problème  $(\mathcal{P})$  est alors restreint sur chaque domaine local  $\Omega_l$  :

$$(\mathcal{P}_{|\Omega_l}) : \begin{cases} \mathcal{L}_{|\Omega_l}(u) = f_{|\Omega_l} & \text{dans } \Omega_l \\ \text{CL appropriées} & \text{sur } \partial\Omega_l \end{cases}$$

Chaque domaine  $\Omega_l$  est discrétisé par une grille  $G_l$  de frontière  $\Gamma_l$  et de pas de discrétisation  $h_l < h_{l-1}$ . Pour tout type de discrétisation standard (différences finies, éléments finis, volumes finis), sans perte de généralité, la discrétisation nodale du problème précédent donne le problème  $(\mathcal{P}_l)$  qui peut s'écrire :

$$(\mathcal{P}_l) : \{ \mathcal{L}_l(u_l) = f_l + g_l \quad \text{dans } G_l$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_l & : \text{opérateur discret associé à } \mathcal{L}_{|\Omega_l} \text{ sur } G_l \\ u_l & : \text{vecteur des inconnues nodales} \\ f_l & : \text{vecteur associé à la discrétisation du second membre } f_{|\Omega_l} \\ g_l & : \text{vecteur associé à la discrétisation des C.L. sur } \Gamma_l \end{cases}$$

La méthode LDC va agir sur ce problème en modifiant uniquement le second membre ( $f_l$  et  $g_l$ ). Ainsi, le problème discret nodal résolu durant chaque phase (prolongement, restriction) du  $k^{\text{ième}}$  ( $k \geq 1$ )  $\wedge$ -cycle s'écrit :

$$(\mathcal{P}_l^k) : \{ \mathcal{L}_l(u_l^k) = f_l^k + g_l^k \quad \text{dans } G_l \quad (\text{II.1})$$

Ainsi, au cours des  $\wedge$ -cycles, seul le second membre ( $f_l^k$ ) et les valeurs des CL ( $g_l^k$ ) vont varier. Les modifications seront détaillées dans les sections suivantes. Comme la partie  $f_l^k$  sera mise à jour durant la phase de restriction, pour  $k \geq 1$ , nous noterons dans la suite la différence entre le second membre durant la phase de prolongement  $f_{l,p}^k$  et durant la phase de restriction  $f_{l,r}^k$ .

Par souci de clarté, dans la suite du chapitre les illustrations de l'algorithme sont présentées sur des maillages hiérarchiques. Cependant, les équations sont génériques et peuvent être utilisées sur des maillages non hiérarchiques (voir [Nefedov et Mattheij, 2002] par exemple).

### II.1.2.a Initialisation

Par convention, nous notons  $f_l^0$  la discrétisation du second membre du problème continu  $f_{|\Omega_l}$  sur  $G_l$ . Nous posons également  $f_{l,p}^1 = f_l^0$ .

La solution grossière initiale  $u_0^0$  est obtenue en résolvant  $(\mathcal{P}_0)$  qui est le problème discret nodal associé à  $(\mathcal{P})$ , défini sur  $G_0$ .

Alors, les opérations de prolongement et de restriction suivantes seront répétées pour  $k$  variant de 1 à  $k^*$  (voir figure II.2).

### II.1.2.b Prolongement : définition des conditions aux limites

Les CL sur les grilles  $G_l$ ,  $0 < l \leq l^*$  avec  $l^* > 0$ , sont définies par (voir l'exemple sur la figure II.3) :

- Sur  $\Gamma_l \cap \partial\Omega$  les CL du problème de départ ( $\mathcal{P}$ ) sont imposées.
- Sur  $\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$  des conditions de Dirichlet sont définies. Les valeurs sont obtenues via l'opérateur de prolongement  $P_{l-1}^l$  appliqué sur la solution discrète immédiatement plus grossière  $u_{l-1}^k$  :

$$u_{\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)}^k = (P_{l-1}^l(u_{l-1}^k))|_{\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)}$$

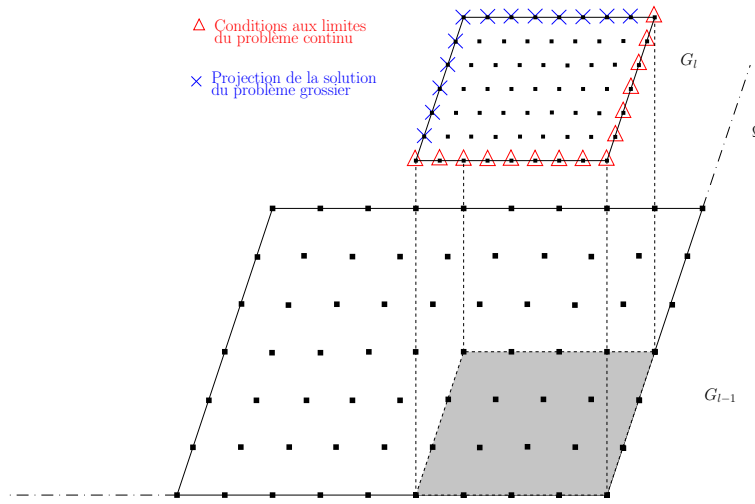


FIGURE II.3 – Étape de prolongement : conditions aux limites sur  $G_l$  ( $l \neq 0$ )

La solution fine  $u_l^k$  est alors obtenue en résolvant le problème ( $\mathcal{P}_l^k$ ) ainsi défini.

### II.1.2.c Restriction : correction à l'aide du résidu

L'étape de restriction consiste à corriger le problème grossier via un résidu calculé à partir de la solution immédiatement plus fine. Les CL  $g_l^k$  définies durant l'étape de prolongement précédente sont conservées afin de résoudre le nouveau problème ( $\mathcal{P}_l^k$ ).

Deux ensembles de nœuds de  $G_l$  doivent ensuite être définis, voir [Hackbusch, 1984] et la figure II.4. L'ensemble  $A_l$  contient les nœuds de  $G_l$  strictement inclus dans le domaine discrétisé par  $G_{l+1}$ . Cet ensemble est la zone de restriction de la solution fine  $u_{l+1}^k$  :

$$\tilde{u}_l^k(x) = (R_{l+1}^l u_{l+1}^k)(x) \quad \forall x \in A_l$$

où  $R_{l+1}^l$  est un opérateur d'interpolation (souvent polynomial) de la grille fine  $G_{l+1}$  vers la grille grossière  $G_l$ .

L'ensemble  $\hat{A}_l$  est constitué des nœuds intérieurs de  $A_l \cup (\Gamma_l \cap \Gamma)$  au sens du schéma de discrétisation (i.e. tel que  $\forall y \in \hat{A}_l$ , le calcul de  $\mathcal{L}_l(u_l^k)(y)$  ne fasse intervenir que des valeurs  $\mathcal{L}_l(u_l^k)(x)$  avec



$x \in A_l \cup (\Gamma_l \cap \Gamma)$ ). Il définit la zone où le second membre  $f_{l,r}^k$  sera modifié (zone de correction). Le résidu local grossier associé à la solution  $\tilde{u}_l^k$  est calculé par :

$$r_l^k(u)(x) = (\mathcal{L}_l(\tilde{u}_l^k) - f_l^0 - g_l^k)(x) \quad \forall x \in \mathring{A}_l \quad (\text{II.2})$$

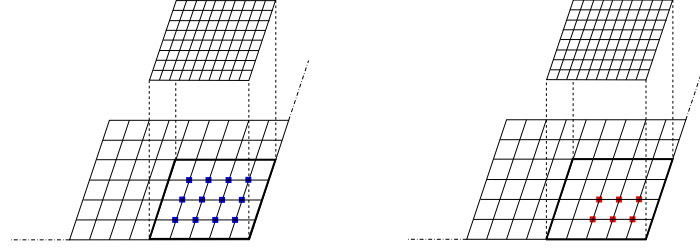


FIGURE II.4 – Zone de restriction  $A_l$  à gauche et zone de correction  $\mathring{A}_l$  à droite (exemple pour l'opérateur discrétisé sur un stencil à 5 points)

La solution grossière  $u_l^k$  est corrigée en résolvant le problème grossier avec le second membre modifié :

$$f_{l,r}^k = f_l^0 + \chi_{\mathring{A}_l} r_l^k(u) \quad (\text{II.3})$$

où  $\chi_{\mathring{A}_l}$  est la fonction caractéristique de  $\mathring{A}_l$ .

Comme la correction n'agit de façon directe que sur les nœuds de l'ensemble  $\mathring{A}_l$ , la méthode LDC nécessite une zone de correction  $A_l$  assez large pour être efficace [Hackbusch, 1984].

La solution la plus grossière est ensuite utilisée pour l'étape de prolongement suivante (voir la figure II.2) :  $u_0^{k+1} = u_0^k$ .

Remarque : L'équation (II.3) suppose que le résidu du problème fin  $\hat{r}_{l+1}^k = \hat{R}_{l+1}^l(\mathcal{L}_{l+1}(u_{l+1}^k) - f_{l+1,r}^k - g_{l+1}^k)$  (où  $\hat{R}_{l+1}^l$  est un opérateur d'interpolation assurant la conservation des efforts) est négligeable devant  $r_l^k$ , ce qui implique que la résolution du problème fin est suffisamment précise (voir [Khadra et al., 1996] par exemple) :

$$\|\hat{r}_{l+1}^k\| \ll \|r_l^k\| \quad (\text{II.4})$$

### II.1.2.d Algorithme LDC générique

---

#### Algorithme II.1 : Algorithme LDC générique

---

- **Initialisation** : Calcul de  $u_0^0$   
Résolution du problème  $(\mathcal{P}_0^0)$
- **Itérations** : Calcul de  $u_l^k$   
Pour  $k = 1$  à  $k^*$   
 $u_0^k = u_0^{k-1}$
- **Prolongement** : Résolution sur les grilles fines  $G_l$   
Pour  $l = 1$  à  $l^*$ 
  - Détermination des valeurs Dirichlet sur  $\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$

$$u_{\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)}^k = (P_{l-1}^l(u_{l-1}^k))|_{\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)}$$

- Calcul de  $u_l^k$  solution du problème  $(\mathcal{P}_l^k)$
- **Restriction** : Correction sur les grilles grossières  $G_l$   
Pour  $l = l^* - 1$  à 0
  - Restriction de la solution fine  $u_{l+1}^k$  sur  $A_l$

$$\tilde{u}_l^k(x) = (R_{l+1}^l u_{l+1}^k)(x) \quad \forall x \in A_l$$

- Calcul du résidu local grossier sur  $\hat{A}_l$

$$r_l^k(u)(x) = (\mathcal{L}_l(\tilde{u}_l^k) - f_l^0 - g_l^k)(x) \quad \forall x \in \hat{A}_l$$

- Correction de la solution grossière  $u_l^k$  par résolution du problème  $(\mathcal{P}_l^k)$  avec le second membre modifié

$$f_{l,r}^k = f_l^0 + \chi_{\hat{A}_l} r_l^k(u)$$


---

### II.1.3 Généralisation multi-niveaux

L'algorithme LDC est écrit classiquement pour deux grilles. Il peut facilement être étendu à plusieurs grilles, en générant les sous-problèmes récursivement.

Cependant, cette généralisation pose la question du second membre à utiliser dans l'étape de prolongement. En effet, celui-ci n'est pas clairement explicité car ce n'est pas le point-clé de l'étape de prolongement et surtout car très peu d'articles écrivent l'algorithme multi-grille local général. Deux possibilités dépendant de la façon de considérer le niveau intermédiaire apparaissent. En effet, ce niveau est à la fois un niveau fin et grossier : il peut être vu comme un niveau fin par rapport au niveau immédiatement plus grossier ou comme un niveau grossier à partir duquel un nouvel algorithme bi-grille est effectué.

L'hypothèse standard consiste à considérer chaque niveau intermédiaire comme un niveau grossier à partir duquel un nouvel algorithme à deux grilles est appliqué. Ainsi, le second membre de l'étape de restriction précédente est utilisé pour l'étape de prolongement, voir [Anthonissen *et al.*, 2003] par exemple :

$$f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1} \quad (\text{II.5})$$

où  $f_{l,r}^k$  est défini par l'équation (II.3).

L'autre hypothèse consiste à avoir une vision globale du cycle multi-grille (cf. figure II.2). Les niveaux intermédiaires jouent le rôle de grilles fines durant l'étape de prolongement et de grilles grossières durant l'étape de restriction. Par conséquent, le second membre de l'étape de prolongement  $f_{l,p}^k$  n'est pas modifié au cours des  $\wedge$ -cycles :

$$f_{l,p}^k = f_l^0 \quad (\text{II.6})$$

Pour le niveau le plus fin, on a aussi toujours  $f_{l^*,p}^k = f_{l^*}^0$  (pas de restriction sur le niveau le plus fin). Ainsi, dans le cas bi-grille, les deux hypothèses conduisent au même second membre  $f_1^k = f_1^0$ , ce qui est cohérent avec l'algorithme classique de la littérature.

Ces deux hypothèses vont être testées et comparées dans la section II.3 pour plusieurs niveaux de grilles afin de voir si une méthode plus intéressante que l'autre se dégage.

### II.1.4 Performances de la méthode LDC

Le premier intérêt à utiliser la méthode LDC concerne la place mémoire nécessaire au calcul. En effet, l'utilisation de maillages raffinés uniquement localement permet de gagner de la place mémoire par rapport à l'utilisation d'un maillage de calcul unique raffiné uniformément.

De plus, comme les maillages locaux peuvent être choisis structurés réguliers uniformes (ce qui n'est pas le cas des maillages obtenus pour les méthodes de raffinement conduisant à l'utilisation d'un maillage unique) un gain en temps de calcul est également attendu.

Concernant l'ordre de convergence de la méthode, Ferket [Ferket et Reusken, 1996] a montré que pour une discrétisation en différences finies, la méthode LDC permettait de conserver l'ordre de convergence de l'erreur de discrétisation tout en diminuant la valeur de cette erreur, à condition que les opérateurs de projection soient bien choisis. En effet, en notant  $\tilde{u}$  la solution analytique du problème ( $\mathcal{P}$ ),  $u_c$  la solution LDC bi-grille obtenue sur le maillage composite,  $h$  la taille de maille grossière,  $h_{fin}$  la taille de maille fine et  $j$  le degré des opérateurs d'interpolation, il montre que pour une discrétisation par un schéma différences finies à l'ordre 2 :

$$\|u_c - \tilde{u}\|_\infty \leq C(C_1 h^2 + C_2 h_{fin}^2 + C_3 h^j) \quad (\text{II.7})$$

avec  $C_2 \gg C_1$  et  $C_2 \gg C_3$ . Le terme en  $h^2$  tient ici compte de l'erreur de pollution.

Afin d'assurer la conservation de l'ordre optimal de convergence en fonction de la taille de maille locale  $O(h_{fin}^2)$ , le degré des opérateurs d'interpolation (prolongement, restriction) doit donc être cohérent avec l'ordre du schéma de discrétisation attendu.

En généralisant la démonstration de [Ferket et Reusken, 1996] à tout type de discrétisation et d'ordre de convergence, on peut s'attendre à ce que la méthode LDC permette d'atteindre l'ordre du schéma de discrétisation en fonction du pas de maillage local le plus fin, et donc diminuer ainsi considérablement l'erreur sur la solution. Ainsi, si la méthode de discrétisation choisie converge en  $O(h^p)$  et que la taille de maille minimale atteinte dans le processus MGL est  $h_{fin}$ , la convergence attendue est en  $O(h_{fin}^p)$  pour la méthode LDC. En pratique, ce résultat est obtenu dans la littérature (voir [Khadra et al., 1996, Ramière et al., 2007a] par exemple).

## II.2 Application de la méthode LDC à l'élasticité linéaire

### II.2.1 Formulation mécanique du problème

Soit un solide élastique linéaire qui occupe un domaine  $\Omega$  de frontière assez régulière  $\Gamma$  et de normale sortante  $\mathbf{n}$ . Des déplacements  $\mathbf{u}_0$  et des forces  $\mathbf{F}$  suffisamment régulières sont imposés respectivement sur une partie  $\Gamma_U$  de la frontière et sur la partie restante  $\Gamma_F$ , avec  $\Gamma_U \cup \Gamma_F = \Gamma$  et  $\Gamma_U \cap \Gamma_F = \emptyset$ .

Le problème à résoudre s'écrit :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega & (\text{II.8a}) \\ \sigma = C : \varepsilon(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega & (\text{II.8b}) \\ \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad}^T(\mathbf{u})) & & (\text{II.8c}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Gamma_U & (\text{II.8d}) \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_0 & \text{sur } \Gamma_F & (\text{II.8e}) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \sigma & : \text{ tenseur des contraintes} \\ \mathbf{f} & : \text{ terme source suffisamment régulier} \\ \varepsilon & : \text{ tenseur des déformations} \\ \mathbf{u} & : \text{ vecteur des déplacements} \end{cases}$$

$C$  est le tenseur d'élasticité ayant les propriétés usuelles de symétrie et de positivité :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{jikl} = C_{klij} \\ \exists c > 0, \quad C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} &> c \|\varepsilon\|^2 \end{aligned}$$

De plus, en utilisant les notations d'Einstein, on a par définition des opérateurs : et . :

$$\begin{aligned} (C : \varepsilon)_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ (\sigma \cdot \mathbf{n})_i &= \sigma_{ij} \mathbf{n}_j \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, le problème admet alors une solution unique  $\mathbf{u}$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Le problème est résolu directement en déplacements ( $\mathbf{u}$ ), puisque les contraintes ( $\sigma$ ) peuvent s'exprimer simplement en fonction des déplacements. On obtient alors un problème standard linéaire en fonction de  $\mathbf{u}$ .

On note  $\mathbf{u}^*$  un champ de déplacement cinématiquement admissible à 0, c'est-à-dire qu'il est cinématiquement admissible et nul sur le bord  $\Gamma_U$ . Alors, la formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^* (\operatorname{div}(\sigma) + \mathbf{f}) d\Omega = 0 \quad (\text{II.9})$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient :

$$\int_{\Omega} \sigma(\varepsilon(\mathbf{u})) : \varepsilon(\mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{F}_N \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (\text{II.10})$$

$\sigma(\varepsilon(\mathbf{u}))$  est donné par la loi de comportement. Dans le cas particulier de l'élasticité linéaire, on a directement :

$$\sigma(\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{C} : \left( \frac{1}{2}(\text{grad}(\mathbf{u}) + \text{grad}^T(\mathbf{u})) \right) \quad (\text{II.11})$$

Ce qui implique :

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}^*) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_F} \mathbf{F}_N \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (\text{II.12})$$

Ce problème linéaire en fonction de  $\mathbf{u}$  est alors discrétisé par la méthode des éléments finis.

La structure est modélisée par un maillage d'éléments finis qui permet de décrire la géométrie. On note  $N^{(i)}$  les fonctions de forme associées, qui sont interpolantes et telles que la fonction  $N^{(i)}$  associée au nœud  $i$  prend la valeur 1 au nœud  $i$  et 0 sur tous les autres nœuds.

Le champ de déplacement est alors discrétisé sur cette base de fonctions de forme. En notant  $U^{(i)}$  le vecteur déplacement du nœud  $i$  et  $p$  le nombre de nœuds du maillage, on a :

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^p N^{(i)}(x) U^{(i)} \quad (\text{II.13})$$

que l'on note sous forme matricielle :

$$\mathbf{u}(x) = [\mathbf{N}]^T [\mathbf{U}] \quad (\text{II.14})$$

De même, on décompose le tenseur des déformations sous la forme :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = [\mathbf{Q}]^T [\mathbf{U}] \quad (\text{II.15})$$

avec

$$[\mathbf{Q}]^T = \frac{1}{2}(\text{grad}([\mathbf{N}]^T) + \text{grad}^T([\mathbf{N}]^T)) \quad (\text{II.16})$$

En choisissant les fonctions test  $\mathbf{u}^*$  unitaires, le problème (II.12) devient :

$$\int_{\Omega} [\mathbf{Q}] \mathbf{C} [\mathbf{Q}]^T d\Omega [\mathbf{U}] = \int_{\Gamma_F} \mathbf{F}_N [\mathbf{N}] d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{f} [\mathbf{N}] d\Omega \quad (\text{II.17})$$

Soit :

$$[\mathbf{K}][\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] + [\mathbf{G}] \quad (\text{II.18})$$

où  $[\mathbf{K}]$  est la matrice de rigidité élastique du système, calculée en remplaçant l'intégrale par une somme pondérée sur les points de Gauss. Les forces externes sont décomposées en forces externes volumiques  $[\mathbf{F}]$  et surfaciques  $[\mathbf{G}]$ .

Il faut ensuite adjoindre au problème (II.18) les conditions aux limites de Dirichlet sous forme discrétisée. On définit pour cela une matrice  $[\mathbf{H}]$  telle que les conditions aux limites en déplacement soient vérifiées en tout point de la discrétisation de  $\Gamma_U$  :

$$[\mathbf{H}][\mathbf{U}] = [\mathbf{U}_D] \quad \text{sur } \Gamma_U \text{ discret}$$

L'algorithme LDC présenté section II.1 p.33 s'exprime alors, dans le cas particulier de l'élasticité linéaire, pour deux grilles  $G_0$  et  $G_1$  de matrice de rigidité élastique respective  $[\mathbf{K}_0]$  et  $[\mathbf{K}_1]$ , sous la forme de l'algorithme suivant.

---

**Algorithme II.2 : Méthode LDC bi-grille pour l'élasticité linéaire**


---

– **Initialisation :**

- Calcul de la solution  $[U_0^0]$  du problème de départ sur la grille  $G_0$

$$[K_0][U_0^0] = [F_0^0] + [G_0]$$

$$[H_0][U_0^0] = [U_{D,0}] \quad \text{sur } \Gamma_{U,0}$$

Remarque :  $[U_{D,0}]$  et  $[G_0]$  sont inchangés au cours des itérations

- Définition des CL sur  $\Gamma_1 \cap \partial\Omega$  à partir de celles définies sur  $\partial\Omega$  ( $[G_1]$  sur  $\Gamma_{F,1} \cap \partial\Omega$  et  $[U_{D,1}^k]$  sur  $\Gamma_{U,1} \cap \partial\Omega$ )

– **Itérations :** Calcul de  $[U_0^k]$  et  $[U_1^k]$

Pour  $k = 1$  à  $k^*$

$$[U_0^k] = [U_0^{k-1}]$$

– **Prolongement : Résolution de la solution sur la grille fine  $G_1$  :**

- (i) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_0^k]$  :

$$[U_{D,1}^k] = [P_0^1][U_0^k] \quad \text{sur } \Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega)$$

Remarque : seul  $[U_{D,1}^k]$  sur  $\Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega)$  varie au cours des itérations

Projection réalisée en pratique grâce aux fonctions de forme

- (ii) Calcul de  $[U_1^k]$  en résolvant :

$$[K_1][U_1^k] = [F_1] + [G_1]$$

$$[H_1][U_1^k] = [U_{D,1}^k] \quad \text{sur } \Gamma_{U,1}$$

Remarque :  $[F_1]$  et  $[G_1]$  sont inchangés au cours des itérations

– **Restriction : Correction de la solution sur la grille grossière  $G_0$  :**

- (i) Restriction de la solution fine  $[U_1^k]$  sur  $A_0$  :

$$[\tilde{U}_0^k] = [R_1^0][U_1^k] \quad \text{sur } A_0$$

- (ii) Calcul du résidu local  $[D_0^k]$  à partir des efforts initiaux :

$$[D_0^k] = [K_0][\tilde{U}_0^k] - [F_0^0] - [G_0] \quad \text{sur } \mathring{A}_0$$

$$[D_0^k] = 0 \quad \text{ailleurs}$$

- (iii) Correction de la partie volumique du second membre  $[F_0^k]$  :

$$[F_0^k] = [F_0^0] + [D_0^k]$$

Remarque : seule la partie du second membre dépendant des efforts volumiques  $[F_0^k]$  est modifiée au cours des itérations

- (iv) Correction de  $[U_0^k]$  en résolvant :

$$[K_0][U_0^k] = [F_0^k] + [G_0]$$

$$[H_0][U_0^k] = [U_{D,0}] \quad \text{sur } \Gamma_{U,0}$$


---

## II.2.2 Choix numériques

### II.2.2.a Solveur utilisé

Dans le cadre de la thèse, le code de calcul utilisé est CAST3M [Verpeaux *et al.*, 1988], code de calcul développé au CEA pour l'analyse de structures par la méthode des éléments finis. Ce code est le solveur mécanique de référence des applications PLEIADES, notamment ALCYONE [Marelle et Thouvenin, 2011], logiciel avec lequel les calculs IPG sont menés au CEA. CAST3M permet d'utiliser des éléments finis de Lagrange d'ordre 1 ou 2 maximum. Afin de respecter les contraintes de maillage liées à l'IPG (cf. section I.1.3) et à CAST3M, nous utiliserons tout au long de ce travail la méthode des éléments finis avec des éléments  $Q_1$  de Lagrange standard [Ciarlet, 1978, Raviart et Thomas, 1998].

Afin de respecter l'hypothèse (II.4) sur le résidu des sous-problèmes fins, une résolution quasi exacte doit être réalisée sur les sous-grilles. Étant donné que les grilles de pas de maillage fin sont localisées, chaque grille a un nombre de ddl limité. Nous pouvons donc utiliser un solveur direct pour la résolution des problèmes  $(\mathcal{P}_l^k)$ . Il offre l'avantage de pouvoir conserver la matrice de rigidité factorisée pour les résolutions des  $\wedge$ -cycles suivants. Comme les  $\wedge$ -cycles diffèrent seulement par leur second membre (voir section II.1), le temps nécessaire à une résolution LDC complète sera principalement constitué du temps de résolution de la première étape de prolongement.

### II.2.2.b Raffinement

Nous avons choisi d'utiliser des maillages structurés réguliers afin de représenter les géométries étudiées afin de bénéficier des très bonnes performances des solveurs sur ce type de maillage. Lorsque c'est possible, les maillages seront uniformes. Dans les autres cas (géométrie courbe par exemple), ils seront quasi-uniformes. De plus, nous avons également choisi de travailler sur des maillages hiérarchiques, ce qui présente l'avantage de simplifier la définition des opérateurs de prolongement et surtout de restriction (puisque les nœuds grossiers de  $A_l$  sont des nœuds du maillage fin).

Dans un processus de raffinement hiérarchique, la taille de maille  $h_l$  de la grille  $G_l$  est définie à partir de la taille de maille  $h_{l-1}$  de la grille immédiatement plus grossière  $G_{l-1}$  :

$$h_l = \frac{h_{l-1}}{r_l}$$

où

- $r_l$  est le rapport de raffinement entre les niveaux  $l-1$  et  $l$ . Il peut être différent entre chaque niveau
- $l$  est le niveau de la grille  $G_l$  ( $l=0$  représente le maillage grossier)

Dans le cas où le rapport de raffinement est constant ( $r_l = r \ \forall l$ ), nous pouvons directement relier la taille de maille de la grille  $G_l$  à celle du maillage grossier :

$$h_l = \frac{h_0}{r^l}$$

Dans notre étude, le rapport de raffinement sera pris égal pour tous les niveaux. Il sera en général égal à 2, mais des tests avec  $r = 4$  seront également réalisés.

### II.2.2.c Test de convergence des $\wedge$ -cycles

La convergence des  $\wedge$ -cycles est testée en comparant deux solutions grossières successives :

$$\frac{\|u_0^k - u_0^{k-1}\|_{L^2(G_0)}}{\|u_0^k\|_{L^2(G_0)}} \leq 1.10^{-5}$$

où  $\|\bullet\|_{L^2}$  est la norme  $L^2$  discrète décrite à la section II.2.2.e. La convergence des  $\wedge$ -cycles est rapide puisqu'en moyenne, dans notre étude, nos calculs convergent après 3 à 4  $\wedge$ -cycles quelque soit le nombre de sous-niveaux.

*Remarque : Le test de convergence n'est effectué que sur la solution grossière. Cependant, comme deux solutions grossières successives sont comparées, lorsqu'elles ont convergé cela nous assure que les solutions sur les sous-niveaux sont celles à convergence.*

### II.2.2.d Opérateurs d'interpolation

Concernant les opérateurs de prolongement et de restriction, il s'agit ici de projeter des déplacements. Aucune conservation n'est donc à vérifier. Une interpolation linéaire utilisant les fonctions de base du niveau grossier est donc utilisée durant l'étape de prolongement alors qu'une restriction canonique (maillages hiérarchiques) est effectuée durant l'étape de restriction. Ce choix d'opérateurs est en accord avec la précision au premier ordre attendue pour la méthode (voir section II.2.3).

### II.2.2.e Normes discrètes

Deux normes vont être considérées : la norme  $L^2$  et la norme  $L^\infty$ . Ces deux normes sont complémentaires car la norme  $L^2$  fournit des informations sur la réponse moyenne de la structure alors que la norme  $L^\infty$  donne une information localisée. Sur un espace vectoriel de dimension finie elles sont équivalentes.

En pratique, la norme  $L^2$  discrète sur un domaine d'approximation  $\Omega_h$  s'écrit :

$$\|\varphi_h\|_{L^2(\Omega_h)}^2 = \left( \sum_{K \subset \Omega_h} \|\varphi_h\|_{L^2(K)}^2 \right)$$

où  $\|\varphi_h\|_{L^2(K)}^2$  sera calculée en utilisant les fonctions de forme de l'élément  $Q_1$ . Cette intégration numérique est exacte sur  $Q_1(K)$  ( $R(\varphi) \equiv 0$  si  $\varphi \in Q_1$ ) :

$$\|\varphi_h\|_{L^2(K)}^2 = \int_K \varphi_h^2 dx = \sum_{i=1}^{n_K} \frac{\text{mes}(K)}{n_K} \varphi_h^2(x_i) + R(\varphi_h^2) \quad (\text{II.19})$$

L'indice  $i$  représente un sommet de l'élément  $K$  et  $n_K$  représente le nombre de sommets dans  $K$ .

Par ailleurs, la norme  $L^\infty$  discrète sur le domaine d'approximation  $\Omega_h$  s'écrit :

$$\|\varphi_h\|_{L^\infty(\Omega_h)}^2 = \max_{\Omega_h}(\varphi_h)$$

De plus, comme les valeurs fines locales nous intéressent, nous avons également calculé des normes



composites. À partir d'un maillage initial grossier, ces normes composites nous permettent de tenir compte des solutions approchées obtenues sur les nœuds locaux fins. En pratique, il suffit de sommer les normes récursivement de la grille la plus fine à la grille la plus grossière, en enlevant sur chaque grille la partie raffinée. Nous utiliserons la notation  $\|\bullet\|_{L^2, \text{comp}}$  (respectivement  $\|\bullet\|_{L^\infty, \text{comp}}$ ) pour la norme  $L^2$  composite (respectivement la norme  $L^\infty$  composite).

$$\|\varphi_h\|_{L^2, \text{comp}}^2 = \sum_{i=l^*}^0 \|\varphi_h\|_{L^2(\Omega_{h,i} \setminus \Omega_{h,i+1})}^2 \quad (\text{II.20})$$

et

$$\|\varphi_h\|_{L^\infty, \text{comp}} = \max_i (\|\varphi_h\|_{L^\infty(\Omega_{h,i} \setminus \Omega_{h,i+1})}) \quad (\text{II.21})$$

avec

$$\Omega_{h,l^*+1} = \emptyset$$

### II.2.3 Performances attendues

Nous allons ici nous intéresser à l'ordre de convergence en maillage obtenu par la méthode LDC. L'erreur de discrétisation est définie par la différence entre la solution de référence  $\tilde{u}$  et la solution  $u_h$  du problème discret ( $\mathcal{P}_0$ ) défini sur  $G_0$ .

Dans notre cas, cette erreur peut être décomposée en deux parties : une erreur liée à la modélisation de la singularité et une erreur liée au schéma numérique (i.e. à la discrétisation). Cette dernière tient compte de l'approximation éventuelle de la géométrie. L'erreur de modélisation de la singularité vient du fait que dans un contexte industriel, la position exacte d'une singularité n'est pas connue *a priori*. Afin d'être cohérent avec cette hypothèse, la position approchée de cette singularité va varier avec le maillage. Cette position sera choisie de façon conservative par rapport aux critères de sécurité. Si  $u_d$  représente la solution du problème continu où la singularité est décalée de  $d$  par rapport à sa position réelle, l'erreur de discrétisation s'écrit :

$$\|\tilde{u} - u_h\| \leq \underbrace{\|\tilde{u} - u_d\|}_{\text{erreur de modélisation}} + \underbrace{\|u_d - u_h\|}_{\text{erreur liée au schéma numérique}} \quad (\text{II.22})$$

en notant  $\|\bullet\|$  une norme quelconque. Dans notre cas, nous allons nous intéresser aux normes  $L^p$  ( $L^2$  et  $L^\infty$ ).

La méthode EF  $Q_1$  converge à l'ordre 2 en norme  $L^2$ , même pour un domaine ouvert non polyédrique où la géométrie doit être approximée [Raviart et Thomas, 1998]. L'erreur liée au schéma numérique varie donc comme  $O(h^2)$  en norme  $L^2$ . Concernant l'erreur de modélisation de la singularité, la démonstration faite dans [Ramière, 2008] prouve qu'elle est en  $O(d)$  en norme  $L^2$ . En pratique,  $d$  va varier comme  $h$  (l'approximation de la singularité est dépendante du maillage), donc l'erreur de discrétisation globale sera d'ordre 1 en maillage pour la norme  $L^2$ .

À l'aide d'un processus multi-grille local, nous avons pour but de réduire l'erreur de discrétisation en ajoutant des maillages locaux de pas d'espace de plus en plus fins jusqu'à une taille de maille minimale  $h_{fin}$ . D'après les résultats de Ferket [Ferket et Reusken, 1996], nous attendons donc que la méthode LDC converge en  $O(d_{h_{fin}})$  pour la norme  $L^2$ , jusqu'à ce que l'erreur de pollution devienne prépondérante.

Afin de vérifier les performances de la méthode LDC, les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  discrètes relatives de l'erreur vont être étudiées. La norme  $L^2$  discrète relative est le rapport entre la norme  $L^2$  discrète de l'erreur et la norme  $L^2$  discrète de la solution de référence  $\tilde{u}$  :

$$\|e_h\|_{L^2(\Omega_h)} = \frac{\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2(\Omega_h)}}{\|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega_h)}} \quad (\text{II.23})$$

Concernant la norme  $L^\infty$  discrète relative de l'erreur, appelée aussi norme maximum relative de l'erreur, elle est définie par :

$$\|e_h\|_{L^\infty(\Omega_h)} = \frac{\max_{\Omega_h} |\tilde{u} - u_h|}{\max_{\Omega_h} |\tilde{u}|} \quad (\text{II.24})$$

D'autre part, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\|e_h\|_{L^2,comp} = \frac{\|\tilde{u} - u_h\|_{L^2,comp}}{\|\tilde{u}\|_{L^2,comp}} \quad (\text{II.25})$$

et

$$\|e_h\|_{L^\infty,comp} = \frac{\|\tilde{u} - u_h\|_{L^\infty,comp}}{\|\tilde{u}\|_{L^\infty,comp}} \quad (\text{II.26})$$

## II.3 Stratégie multi-niveaux

### II.3.1 Passage de l'algorithme bi-grille à l'algorithme multi-grille

Comme vu dans la section II.1.3, l'algorithme LDC est écrit classiquement pour deux grilles. Il peut facilement être étendu à plusieurs grilles, en générant les sous-problèmes récursivement. Cependant, cette généralisation pose la question du second membre à utiliser dans l'étape de prolongement. En effet, celui-ci n'est pas clairement explicité car ce n'est pas le point-clé de l'étape de prolongement et surtout car très peu d'articles écrivent l'algorithme multi-grille local général. Il peut être défini suivant deux versions différentes qui conduiront à deux algorithmes multi-niveaux.

#### II.3.1.a Utilisation du second membre corrigé lors de l'étape de prolongement

Nous rappelons que l'une des hypothèses consiste à appliquer récursivement des algorithmes à deux grilles entre deux sous-niveaux. Le second membre durant l'étape de prolongement est alors pris égal au second membre de l'étape de restriction précédente :

$$[F_{l,p}^k] = [F_{l,r}^{k-1}] \quad (\text{II.27})$$

Considérons par exemple 3 grilles notées  $G_0$ ,  $G_1$  et  $G_2$ , dont les matrices de rigidité élastique sont respectivement  $[K_0]$ ,  $[K_1]$  et  $[K_2]$ . Avec ce choix, si nous reprenons l'algorithme de la section II.2.1 pour le cas à trois grilles, nous obtenons alors l'algorithme qui suit. Nous avons détaillé ici la phase de prolongement pour chaque grille, car elles sont traitées différemment.

---

#### Algorithme II.3 : Méthode LDC 3-grilles pour l'élasticité linéaire, avec second membre corrigé dans l'étape de prolongement

---

- **Initialisation :**
  - Calcul de la solution  $[U_0^0]$ 

$$[K_0][U_0^0] = [F_0^0] + [G_0]$$

$$[H_0][U_0^0] = [U_{D,0}] \text{ sur } \Gamma_{U,0}$$
  - Initialisation des sous-niveaux
    - Pour  $l = 1$  à 2
    - Définition des valeurs des CL du problème continu sur  $\Gamma_l \cap \partial\Omega$  :  $[G_l]$  et  $[U_{D,l}]$
- **Itérations :** Calcul de  $[U_l^k]$ 
  - Pour  $k = 1$  à  $k^*$ 
    - $[U_0^k] = [U_0^{k-1}]$
  - **Prolongement de 0 à 1 : Résolution sur la grille intermédiaire  $G_1$  :**
    - (i) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_0^k]$

$$[U_{D,1}^k] = [P_0^1][U_0^k] \text{ sur } \Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega)$$

Réalisé en pratique grâce aux fonctions de forme

- (ii) Calcul de  $[U_1^k]$  en résolvant :
  - Si  $(k = 1)$

$$[K_1][U_1^1] = [F_{1,p}^1] + [G_1] = [F_1^0] + [G_1]$$

$$[H_1][U_1^1] = [U_{D,1}^1] \text{ sur } \Gamma_{U,1}$$

– Sinon

$$[K_1][U_1^k] = [F_{1,p}^k] + [G_1] = [F_1^0] + [\mathbf{D}_1^{k-1}] + [G_1] = [F_{1,r}^{k-1}] + [G_1]$$

$$[H_1][U_1^k] = [U_{D,1}^k] \quad \text{sur } \Gamma_{U,1}$$

– **Prolongement de 1 à 2 : Résolution sur la grille fine  $G_2$  :**

(i) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_2 \setminus (\Gamma_2 \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_1^k]$

$$[U_{D,2}^k] = [P_1^2][U_1^k] \quad \text{sur } \Gamma_2 \setminus (\Gamma_2 \cap \partial\Omega)$$

Réalisé en pratique grâce aux fonctions de forme

(ii) Calcul de  $[U_2^k]$  en résolvant :

$$[K_2][U_2^k] = [F_{2,p}^k] + [G_2] = [F_2^0] + [G_2]$$

$$[H_2][U_2^k] = [U_{D,2}^k] \quad \text{sur } \Gamma_{U,2}$$

– **Restriction : Correction des grilles grossières  $G_l$  :**

Pour  $l = 1$  à  $0$

(i) Restriction de la solution fine  $[U_{l+1}^k]$  sur  $A_l$  :

$$[\tilde{U}_l^k] = [R_{l+1}^l][U_{l+1}^k] \quad \text{sur } A_l$$

(ii) Calcul du résidu local  $[D_l^k]$  à partir des efforts initiaux :

$$[D_l^k] = [K_l][\tilde{U}_l^k] - [F_l^0] - [G_l] \quad \text{sur } \mathring{A}_l$$

$$[D_l^k] = 0 \quad \text{ailleurs}$$

(iii) Correction du second membre  $[F_{l,r}^k]$  :

$$[F_{l,r}^k] = [F_l^0] + [D_l^k]$$

(iv) Correction de  $[U_l^k]$  en résolvant :

$$[K_l][U_l^k] = [F_{l,r}^k] + [G_l]$$

$$[H_l][U_l^k] = [U_{D,l}^k] \quad \text{sur } \Gamma_{U,l}$$

Ce que l'on peut représenter schématiquement par :

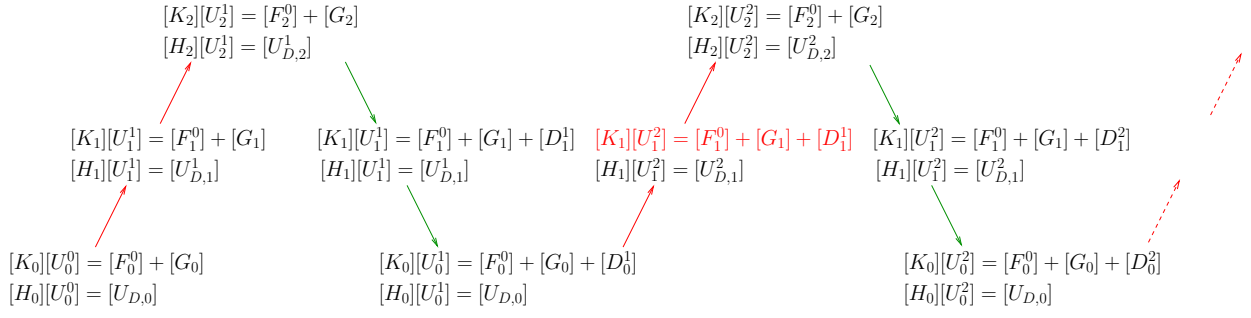


FIGURE II.5 – Problèmes résolus au cours d'un cycle LDC 3-grilles - Utilisation du second membre « corrigé »

### II.3.1.b Utilisation du second membre initial lors de l'étape de prolongement

La seconde hypothèse consiste à avoir une vision globale du cycle multi-grille local. Les niveaux intermédiaires sont alors considérés tour à tour comme des grilles fines durant l'étape de prolongement et comme des grilles grossières durant l'étape de restriction. Ainsi, toutes les grilles sont traitées de la même façon durant chaque étape et le second membre  $[F_{l,p}^k]$  de l'étape de prolongement n'est pas modifié au cours des  $\wedge$ -cycles :

$$[F_{l,p}^k] = [F_l^0] \quad (\text{II.28})$$

Considérons 3 grilles notées  $G_0$ ,  $G_1$  et  $G_2$ , dont les matrices de rigidité élastique sont respectivement  $[K_0]$ ,  $[K_1]$  et  $[K_2]$ . Avec ce choix, si nous reprenons l'algorithme de la section II.2.1 pour le cas à trois grilles, nous obtenons alors l'algorithme qui suit. Nous n'avons pas eu besoin de détailler ici la phase de prolongement, car tous les niveaux sont traités de façon identique.

---

#### Algorithme II.4 : Méthode LDC 3-grilles pour l'élasticité linéaire, avec second membre initial dans l'étape de prolongement

---

– **Initialisation :**

- Calcul de la solution  $[U_0^0]$

$$[K_0][U_0^0] = [F_0^0] + [G_0]$$

$$[H_0][U_0^0] = [U_{D,0}] \quad \text{sur } \Gamma_{U,0}$$

- Initialisation des sous-niveaux

Pour  $l = 1$  à 2

Récupération des valeurs des CL du problème continu sur  $\Gamma_l \cap \partial\Omega$  :  $[G_l]$  et  $[U_{D,l}]$

- **Itérations :** Calcul de  $[U_l^k]$

Pour  $k = 1$  à  $k^*$

- $[U_0^k] = [U_0^{k-1}]$

- **Prolongement :** Résolution sur les grilles fines  $G_l$  :

Pour  $l = 1$  à 2

- (i) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_{l-1}^k]$

$$[U_{D,l}^k] = [P_{l-1}^l][U_{l-1}^k] \quad \text{sur } \Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$$

Réalisé en pratique grâce aux fonctions de forme

(ii) Calcul de  $[U_l^k]$  en résolvant :

$$[K_l][U_l^k] = [F_{l,p}^k] + [G_l] = [F_l^0] + [G_l]$$

$$[H_l][U_l^k] = [U_{D,l}^k] \quad \text{sur } \Gamma_{U,l}$$

– **Restriction : Correction des grilles grossières  $G_l$  :**

Pour  $l = 1$  à  $0$

(i) Restriction de la solution fine  $[U_{l+1}^k]$  sur  $A_l$  :

$$[\tilde{U}_l^k] = [R_{l+1}^l][U_{l+1}^k] \quad \text{sur } A_l$$

(ii) Calcul du résidu local  $[D_l^k]$  à partir des efforts initiaux :

$$[D_l^k] = [K_l][\tilde{U}_l^k] - [F_l^0] - [G_l] \quad \text{sur } \mathring{A}_l$$

$$[D_l^k] = 0 \quad \text{ailleurs}$$

(iii) Correction du second membre  $[F_{l,r}^k]$  :

$$[F_{l,r}^k] = [F_l^0] + [D_l^k]$$

(iv) Correction de  $[U_l^k]$  en résolvant :

$$[K_l][U_l^k] = [F_{l,r}^k] + [G_l]$$

$$[H_l][U_l^k] = [U_{D,l}^k] \quad \text{sur } \Gamma_{U,l}$$

Ce que l'on peut représenter schématiquement par :

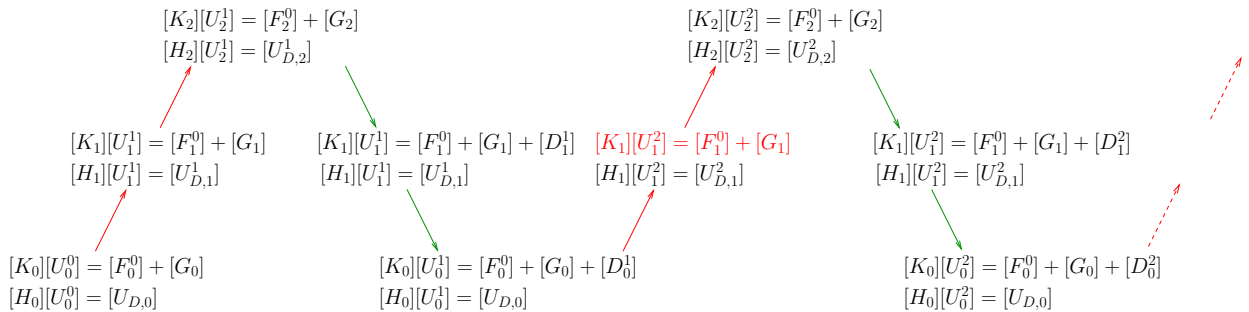


FIGURE II.6 – Problèmes résolus au cours d'un cycle LDC 3-grilles - Utilisation du second membre « initial »

### II.3.2 Cas 2D(r,z) : mise en diablo

Les deux hypothèses quant au choix du second membre sont tout d'abord testées sur le cas test 2D axisymétrique représentant la mise en diablo de la pastille et présenté section I.2.1.

La solution de référence est obtenue avec un maillage uniforme adapté au pic interne de pression, de taille de maille  $2 \cdot 10^{-3}$  mm ( $2 \mu\text{m}$ ) dans chaque direction ( $\simeq 2$  millions de ddl). Elle sera utilisée pour tous les calculs d'erreur associés au cas 2D(r,z) comprenant un comportement élastique linéaire de la gaine.

De plus, dans tout ce chapitre, le rapport de raffinement  $r$  est pris égal à 2. Les sous-grilles sont générées *a priori* grâce à la connaissance du problème : 5 bandes d'éléments sont sélectionnées de part et d'autre de la singularité (située à  $600 \mu\text{m}$ ), et ce sur toute l'épaisseur de la gaine. Un exemple de sous-grilles imbriquées pour lesquelles la taille de maille grossière initiale est de  $327 \mu\text{m}$  est présenté figure II.7. Nous rappelons que le saut de pression est localisé à  $600 \mu\text{m}$  du plan inter-pastille et qu'il n'est pas situé *a priori* sur un nœud de discrétisation.

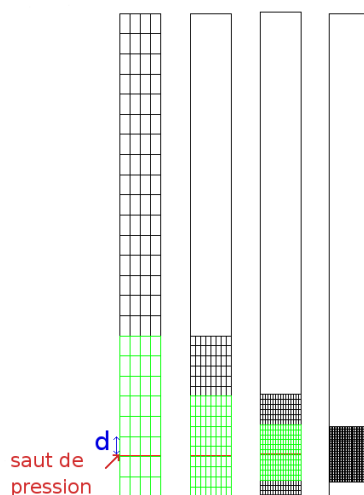


FIGURE II.7 – Exemple de maillages imbriqués - Zones d'intérêt définies *a priori* (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 3$

Ainsi, plus les sous-niveaux sont nombreux, plus la grille la plus fine ne représente qu'une toute petite partie du domaine initial. Les maillages hiérarchiques sont choisis ici cartésiens uniformes, des solveurs rapides peuvent donc être utilisés sur chaque grille.

Sur la figure II.8, on représente en fonction de  $d_{h_0}$ , distance entre la singularité réelle et son approximation sur le maillage grossier initial, la norme  $L^2$  relative de l'erreur sur le maillage grossier après convergence des  $\Lambda$ -cycles. Un à quatre sous-niveaux ont été générés à partir des différents maillages de départ. La vision du niveau intermédiaire comme un niveau fin à l'étape de prolongement correspond au choix  $f_{l,p}^k = f_l^0$  (second membre "initial",  $f^k = f^0$  sur la légende), celle d'un niveau grossier au choix  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$  (second membre "corrigé",  $f^k = f^{k-1}$  sur la légende). La taille de maille initiale est  $h_i = 327 \mu\text{m}$ .

La première conclusion à tirer de cette étude est que, comme attendu, la convergence en maillage mono-grille (sans raffinement de maillage) est du premier ordre par rapport à la distance à la singularité.

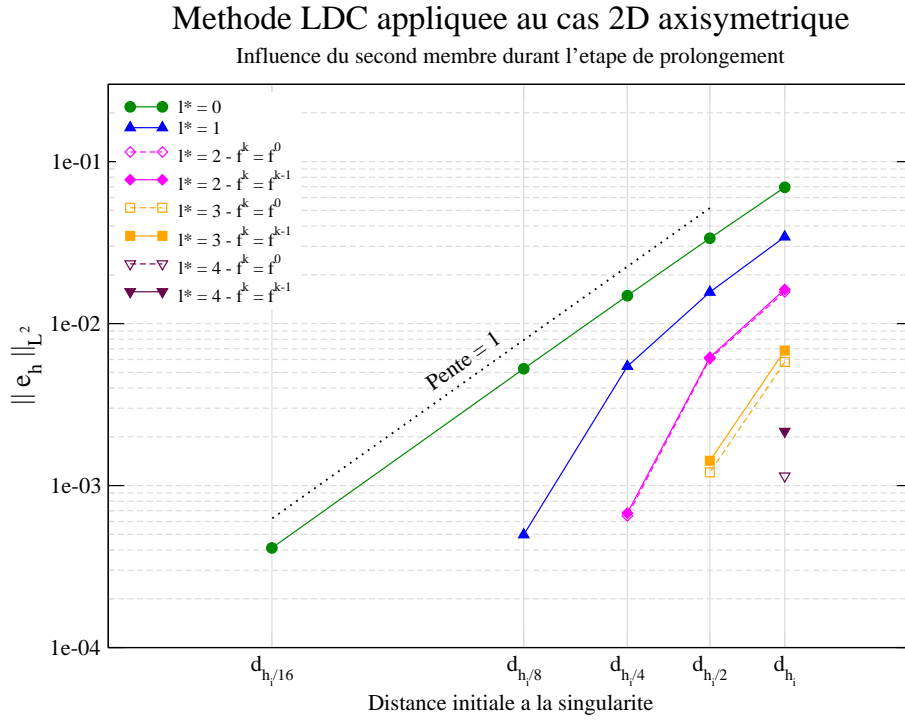


FIGURE II.8 – Norme  $L^2$  relative de l’erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre “initial” ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” ( $f_{l,p}^k = f_l^{k-1}$ )

De plus, les deux approches concernant le second membre durant l’étape de prolongement conservent l’ordre de convergence par rapport à la distance locale à la singularité, avant qu’une stagnation apparaisse. En effet, le même niveau d’erreur est obtenu avec un raffinement local qu’avec une mono-grille globale de pas de discrétisation égal au pas local le plus fin. Ainsi, la méthode LDC converge en  $O(d_{h_{fin}})$ , où  $d_{h_{fin}}$  correspond à la distance locale à la singularité. Par exemple, l’erreur est diminuée d’un facteur 30 en partant d’un maillage de taille  $h_i = 327 \mu m$  et en lui ajoutant 4 sous-niveaux.

Les deux approches conduisent à des résultats équivalents en terme d’erreur avant d’atteindre l’erreur de pollution (voir section I.3.2.c). Ici, cette erreur est principalement due à l’erreur de discrétisation sur la partie non raffinée du maillage. Cependant, le second membre “initial” semble un peu plus précis. Enfin, les deux hypothèses nécessitent le même nombre de  $\Lambda$ -cycles avant de converger, ce qui signifie des temps CPU équivalents.

La norme maximale relative de l’erreur est reportée dans le tableau II.1.

Nous pouvons observer que la convergence optimale en  $O(d_{h_{fin}})$  est également obtenue avec la méthode LDC avant de stagner pour les niveaux d’erreur attendus les plus fins ( $< 1.10^{-3}$ ). Par exemple, la même erreur est obtenue pour  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 0$  que pour  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 1$  ou  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 2$ . Ici encore l’étape de prolongement avec le second membre “initial” donne une solution plus précise surtout pour des niveaux d’erreurs faibles.

Au vu de cette première étude, les comportements en norme  $L^2$  et  $L^\infty$  semblent donc bien équivalents.



$\ e_h\ _L^\infty$ selon le second membre durant l'étape de prolongement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i$	$1.14 \cdot 10^{-1}$	$5.83 \cdot 10^{-2}$	'i' : $2.69 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $2.78 \cdot 10^{-2}$	'i' : $9.57 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.13 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.73 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.73 \cdot 10^{-3}$
$h_i/2$	$5.77 \cdot 10^{-2}$	$2.72 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.05 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.07 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.82 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.18 \cdot 10^{-3}$	
$h_i/4$	$2.62 \cdot 10^{-2}$	$9.71 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.17 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.22 \cdot 10^{-3}$		
$h_i/8$	$9.65 \cdot 10^{-3}$	$9.42 \cdot 10^{-4}$			
$h_i/16$	$7.97 \cdot 10^{-4}$				

TABLE II.1 – Norme  $L^\infty$  relative de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre “initial” ('i' :  $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” ('c' :  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

Afin de s'assurer que l'erreur calculée sur la solution grossière est bien représentative de la solution obtenue sur les sous-niveaux, les normes composites de l'erreur sont ensuite étudiées. La norme  $L^2$  relative composite de l'erreur est tracée sur la figure II.9 alors que la norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur est reportée dans le tableau II.2.

$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$ selon le second membre durant l'étape de prolongement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i$	$1.14 \cdot 10^{-1}$	$5.83 \cdot 10^{-2}$	'i' : $4.16 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $2.78 \cdot 10^{-2}$	'i' : $3.83 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.15 \cdot 10^{-2}$	'i' : $3.67 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $2.79 \cdot 10^{-3}$
$h_i/2$	$5.77 \cdot 10^{-2}$	$2.72 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.65 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.10 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.12 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $2.23 \cdot 10^{-3}$	
$h_i/4$	$2.62 \cdot 10^{-2}$	$9.94 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.44 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.24 \cdot 10^{-3}$		
$h_i/8$	$9.65 \cdot 10^{-3}$	$9.62 \cdot 10^{-4}$			
$h_i/16$	$7.97 \cdot 10^{-4}$				

TABLE II.2 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre “initial” ('i' :  $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” ('c' :  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

Contrairement aux résultats précédents, une différence importante apparaît entre les deux choix de second membre durant l'étape de prolongement. Lorsque le second membre “corrigé” est utilisé, l'erreur composite a le même comportement que l'erreur calculée uniquement sur le niveau le plus grossier. Pour ce second membre, la convergence reste en  $O(d_{h_{fin}})$  pour les deux normes avant d'atteindre l'erreur de pollution. Ces résultats confirment ceux obtenus par Anthonissen et

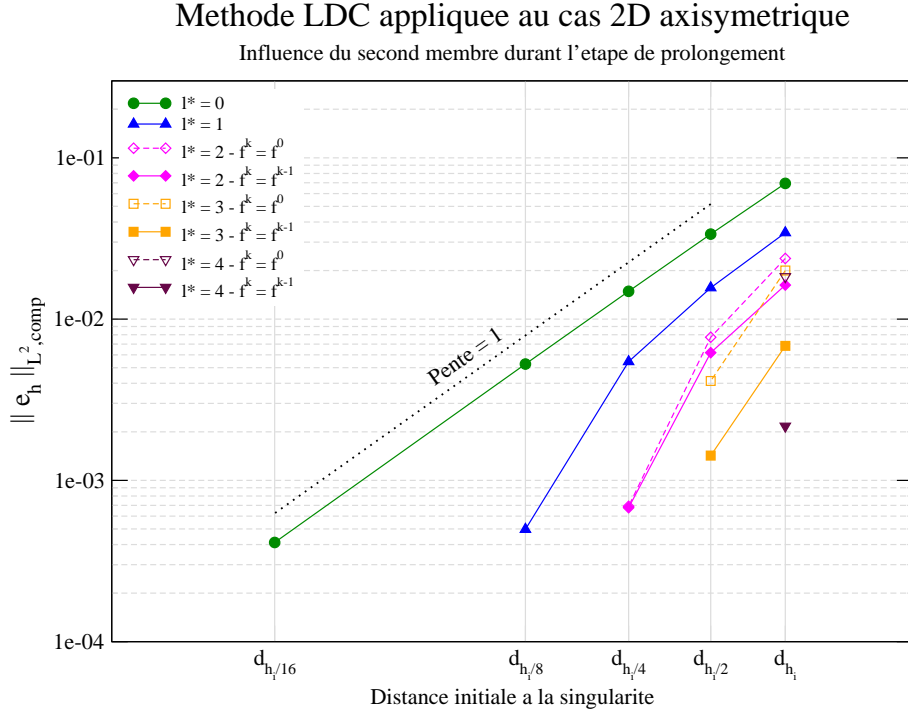


FIGURE II.9 – Norme  $L^2$  relative composite de l’erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre “initial” ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

al. [Anthonissen *et al.*, 2005]. La précision atteinte sur la zone de raffinement est donc homogène de la grille la plus fine à la grille la plus grossière.

Au contraire, une stagnation apparaît précocement pour le second membre “initial”. Le comportement de l’erreur sur la solution composite n’est dans ce cas pas équivalent au comportement de l’erreur sur la solution grossière. Plus le maillage initial est grossier, plus la stagnation semble apparaître dès les premiers niveaux de raffinement. Plus les maillages initiaux sont raffinés, plus l’écart entre les deux seconds membres est faible. De plus, ces écarts sont plus marqués pour la norme  $L^\infty$  que pour la norme  $L^2$ , y compris pour des maillages initiaux fins. L’utilisation du second membre “initial” durant l’étape de prolongement conduit donc à des résultats loin de ceux attendus, puisque la convergence en maillage par rapport au pas de maillage de la grille fine est perdue.

Pour conclure, les deux choix de second membre durant l’étape de prolongement corrigent correctement la solution sur le maillage initial grossier mais seul le second membre “corrigé” conduit également à obtenir des solutions précises sur les grilles fines locales. Il semblerait que les deux choix de second membre durant l’étape de prolongement conduisent à une transmission de résidus corrects lors de l’étape de restriction mais que seul le second membre corrigé permet également d’avoir les bonnes valeurs de Dirichlet en CL sur les sous-niveaux ( $l^* > 1$ ) et donc également les bonnes solutions.

Pour vérifier cette hypothèse, nous pouvons par exemple observer les valeurs des déplacements au niveau de la ligne de CL du niveau le plus fin, pour les deux méthodes.

Les composantes radiales du déplacement sont tracées sur la figure II.10, pour les deux types de second membre.

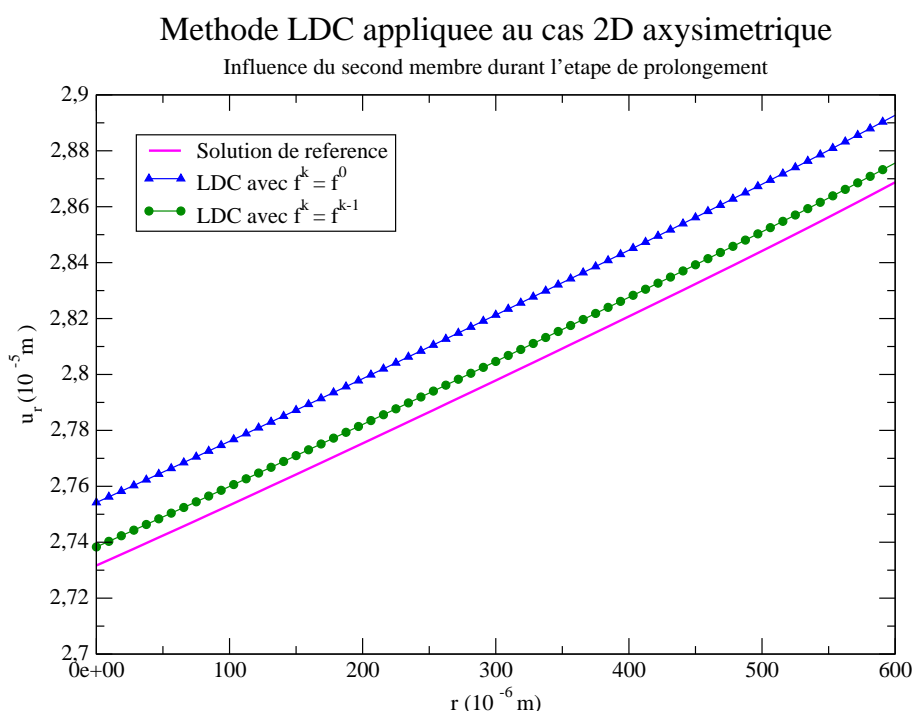


FIGURE II.10 – Déplacement radial le long de la condition aux limites interpolée du niveau le plus fin - Solution de référence et solution composite LDC après convergence - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Influence du choix du second membre durant l'étape de prolongement -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

Ces premiers résultats semblent confirmer notre hypothèse. En effet, les valeurs obtenues pour le second membre “corrigé” sont plus précises que celles obtenues pour le second membre “initial”. Ainsi, l’erreur sur la composante radiale de la solution avec second membre “initial” au niveau du rayon interne de la gaine est de l’ordre de 0.3%. Dans le cas du second membre “corrigé”, l’écart sur la composante radiale n’est plus que de l’ordre de 0.1%.

Par ailleurs, on peut observer que les deux solutions ont la même dérivée. Étant donné le type de problème résolu, faisant intervenir la divergence du gradient des déplacements, le résidu calculé par la formule (II.2) sera donc bien le même pour ces deux solutions.

Ainsi, les déplacements présentés ici semblent corroborer l’hypothèse selon laquelle les deux choix concernant le second membre durant l’étape de prolongement conduisent à transmettre des efforts corrects lors de la restriction. Les CL du problème grossier étant celles du problème original, la solution du problème grossier sera donc correctement corrigée dans les deux cas. Cependant, le second membre “corrigé” semble permettre d’obtenir des solutions précises dès l’étape de prolongement et donc permettre d’avoir des valeurs de CL plus précises pour les sous-niveaux engendrés.

Nous avons ensuite comparé le champ de contrainte de Von Mises obtenu dans la gaine entre la solution obtenue avec le second membre “corrigé” pour la méthode LDC,  $h_0 = h_i/2$ ,  $l^* = 3$  (figure II.11(a)), et la solution de référence (figure II.11(b)). Pour la méthode LDC, le champ de contrainte composite après convergence est tracé.

Qualitativement, les résultats obtenus avec la méthode LDC sont très satisfaisants. En effet, l’utilisation d’un maillage grossier avec 3 sous-niveaux locaux permet déjà d’obtenir le bon comportement

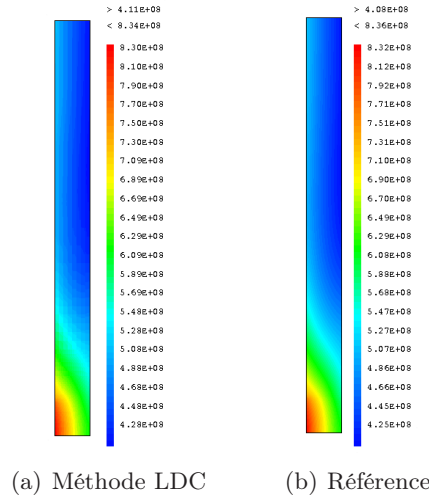


FIGURE II.11 – Contrainte équivalente de Von Mises - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

en contrainte. La répartition du champ de contrainte est similaire pour les deux solutions. Quantitativement, ces résultats sont également très satisfaisants puisque les mêmes bornes maximales et minimales sont obtenues et l'écart maximal entre les deux champs est de l'ordre de 0.75%, ce qui est tout à fait acceptable au regard de la précision des données physiques du problème et de la différence de taille de maille locale entre les deux simulations.

### II.3.3 Cas 2D(r,θ) : fissuration de la pastille

La même étude méthodique est réalisée pour le cas test 2D déformations planes, représentant la fissuration de la pastille et présenté section I.2.2. Là encore les sous-niveaux sont obtenus *a priori* en sélectionnant des éléments autour de la singularité. Le phénomène étant plus localisé, nous ne prenons que 2 bandes d'éléments autour de la singularité, sur toute l'épaisseur de la gaine. Un exemple de maillages imbriqués hiérarchiques est présenté figure II.12

Comme pour le cas test précédent, nous avons utilisé comme solution de référence, la solution obtenue sur un maillage très fin ( $\simeq 2$  millions de ddl) de taille de maille  $1 \mu\text{m}$  dans chaque direction, adapté à la singularité.

Les normes relative d'erreur calculées sur la solution grossière corrigée sont d'abord étudiées. La norme  $L^2$  relative est tracée sur la figure II.13 et la norme  $L^\infty$  relative est reportée dans le tableau II.3. Dans cette série de tests, la taille de maille initiale la plus grossière est  $h_i = 218 \mu\text{m}$ .

Comme précédemment, les deux normes semblent avoir un comportement équivalent.

On peut remarquer la présence d'un palier, qui s'explique par le fait que la distance locale à la singularité n'est pas améliorée pour des maillages de pas  $h_i/16$ ,  $h_i/32$  ou  $h_i/64$ . Comme l'erreur dépend principalement de  $d_h$ , celle-ci n'est pas améliorée (cf. tableau II.3).

Les deux types de second membre durant l'étape de prolongement semblent conduire à la même correction de la solution grossière. Pour des tailles de maille très fines, le second membre initial semble conduire à des solutions légèrement plus précises. Par ailleurs, contrairement au cas test 2D(r,z), nous n'atteignons pas encore l'erreur de pollution, et l'ordre de convergence optimal attendu est obtenu quelque soit le nombre de niveaux de raffinement et le maillage de départ.

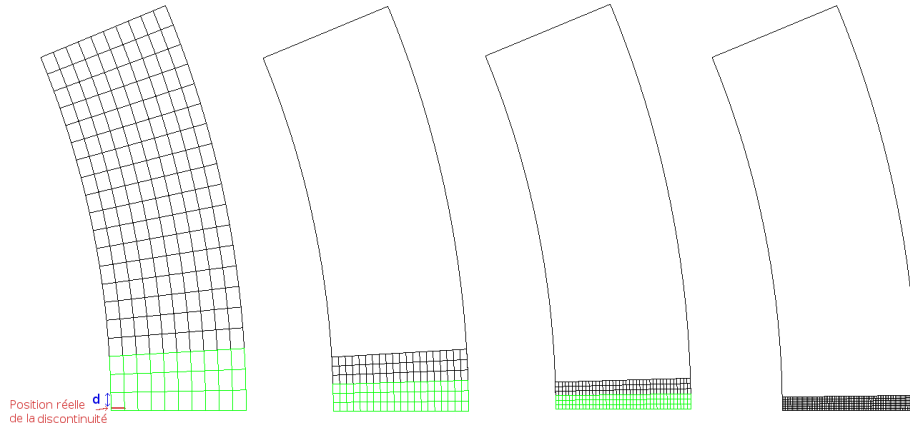


FIGURE II.12 – Exemple de maillages imbriqués - Zones d'intérêt définies *a priori* (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2 = 109 \mu\text{m}$  et  $l^* = 3$

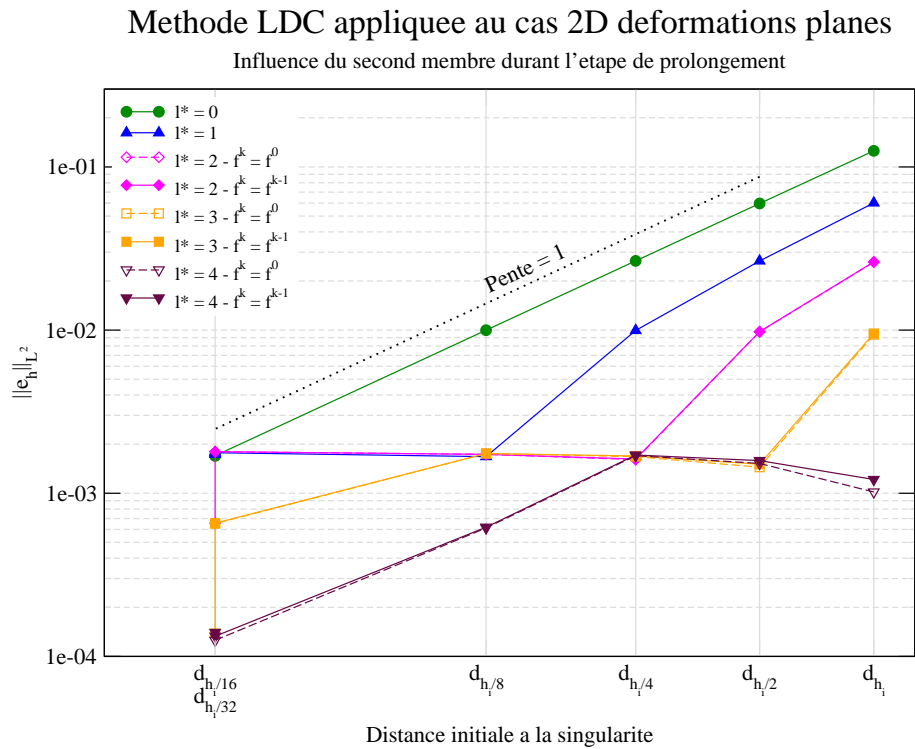


FIGURE II.13 – Norme  $L^2$  relative de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre "initial" ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

$\ e_h\ _{L^\infty}$ selon le second membre durant l'étape de prolongement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i$	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$8.65 \cdot 10^{-2}$	'i' : $3.85 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $3.86 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.42 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.44 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.67 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.94 \cdot 10^{-3}$
$h_i/2$	$8.61 \cdot 10^{-2}$	$3.93 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.48 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.48 \cdot 10^{-2}$	'i' : $2.27 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.36 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.39 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.48 \cdot 10^{-3}$
$h_i/4$	$3.93 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$	'i' : $2.50 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.52 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.60 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.63 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.65 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.67 \cdot 10^{-3}$
$h_i/8$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$2.59 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.68 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.68 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.72 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.71 \cdot 10^{-3}$	'i' : $9.77 \cdot 10^{-4}$ 'c' : $9.87 \cdot 10^{-4}$
$h_i/16$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$2.81 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.86 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.86 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.03 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.04 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.15 \cdot 10^{-4}$ 'c' : $2.26 \cdot 10^{-4}$
$h_i/32$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$2.76 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.03 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.03 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.20 \cdot 10^{-4}$ 'c' : $2.26 \cdot 10^{-4}$	'i' : $2.23 \cdot 10^{-4}$ 'c' : $2.30 \cdot 10^{-4}$

TABLE II.3 – Norme  $L^\infty$  relative de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,  $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre “initial” (‘i’ :  $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” (‘c’ :  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

De plus, il faut noter que nous obtenons aisément des tailles de maille inférieures au micron (par exemple pour le maillage  $h_0 = h_i/16$  et  $l^* = 4$  la taille de maille est  $0.85 \mu\text{m}$ , soit  $0.6 \mu\text{m}$  dans chaque direction), ce qui est l'un des objectifs de notre étude. Cependant, pour ces valeurs, la validité de la solution de référence n'est plus assurée. Ainsi, dans la suite de l'étude nous enlèverons les valeurs d'erreur obtenues pour les maillages les plus fins, qui ne sont plus représentatives. Une autre question se pose aussi pour des tailles de maille aussi fines, inférieures à la taille des grains composant la microstructure de la gaine, celle de la validité de la loi de comportement. Il pourra alors s'avérer nécessaire d'utiliser une loi de comportement microscopique sur les niveaux les plus fins. Des modifications de la méthode de raffinement, s'inspirant des méthodes d'homogénéisation de type EF<sup>2</sup> [Feyel et Chaboche, 2000] seront peut-être nécessaires afin de combiner raffinement spatial et loi de comportement microscopique dans une stratégie multi-échelle.

Afin de vérifier pour ce cas test l'influence du choix du second membre durant l'étape de prolongement sur les solutions des sous-niveaux, les normes composites de l'erreur sont étudiées. La norme  $L^2$  relative composite est tracée sur la figure II.14 alors que la norme  $L^\infty$  relative composite est reportée dans le tableau II.4.

Si on ne s'intéresse qu'à la norme  $L^2$  (figure II.14), la différence entre les deux types de second membre est beaucoup moins flagrante que pour le cas 2D(r, z), puisque seul le maillage  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 4$  conduit à des résultats vraiment différents. Cependant, si on observe les valeurs en norme  $L^\infty$  du tableau II.4, on voit des différences de l'ordre de 30% entre les deux choix de second membre. Les écarts sur les solutions des niveaux fins semblent donc un peu plus marqués en norme  $L^\infty$  qu'en norme  $L^2$ . Ce résultat confirme donc les conclusions de la section précédente, puisque le choix du second membre durant l'étape de prolongement considérant le niveau intermédiaire comme un niveau fin conduit à une erreur jusqu'à 4 fois plus grande que celle attendue, alors que le second membre “corrigé” permet bien d'obtenir le bon comportement asymptotique.

Compte-tenu des hypothèses précédentes expliquant la différence entre les deux choix concernant le second membre durant l'étape de prolongement, le fait que les deux types de second membre

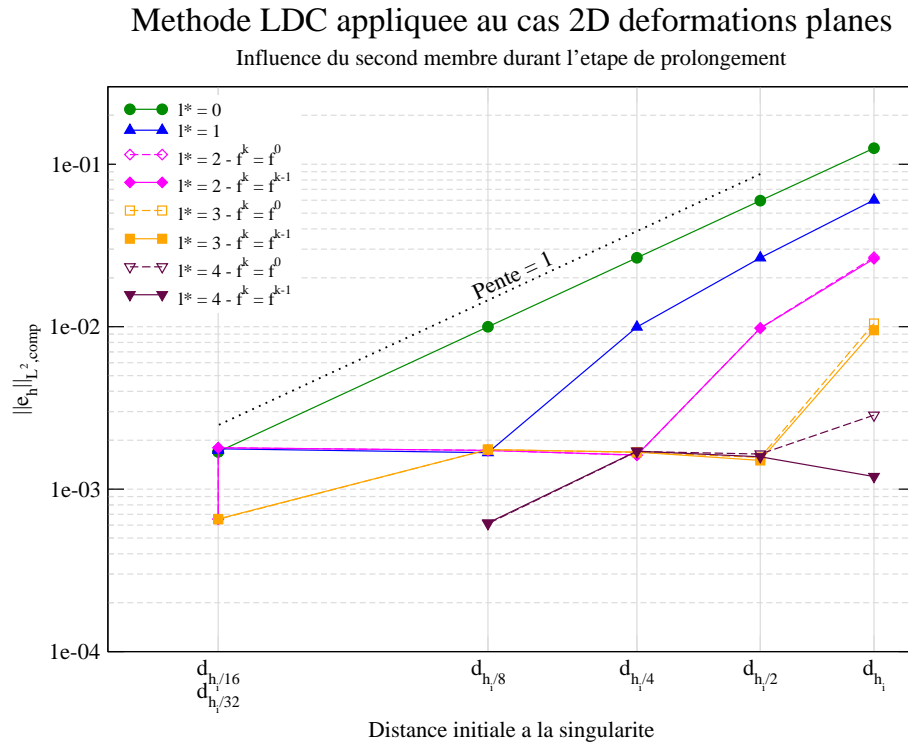


FIGURE II.14 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre “initial” ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$ selon le second membre durant l'étape de prolongement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i$	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$8.65 \cdot 10^{-2}$	'i' : $4.16 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $3.86 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.96 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.44 \cdot 10^{-2}$	'i' : $8.66 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.96 \cdot 10^{-3}$
$h_i/2$	$8.61 \cdot 10^{-2}$	$3.93 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.56 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.48 \cdot 10^{-2}$	'i' : $3.91 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.40 \cdot 10^{-3}$	'i' : $4.02 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.53 \cdot 10^{-3}$
$h_i/4$	$3.93 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$	'i' : $2.93 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.59 \cdot 10^{-3}$	'i' : $3.03 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.69 \cdot 10^{-3}$	'i' : $3.06 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.73 \cdot 10^{-3}$
$h_i/8$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$2.67 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.75 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.75 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.78 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.79 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.12 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.02 \cdot 10^{-3}$
$h_i/16$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$2.81 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.85 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.85 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.12 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.06 \cdot 10^{-3}$	
$h_i/32$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	$2.76 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.10 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $1.06 \cdot 10^{-3}$		

TABLE II.4 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* - Comparaison entre le second membre “initial” ('i' :  $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” ('c' :  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

conduisent pour ce cas test à des différences moins flagrantes que dans le cas 2D(r,z) peut s'expliquer par des zones de raffinement s'appuyant plus sur les bords du domaine initial et donc des sous-niveaux avec moins de CL à interpoler. En effet, pour les niveaux intermédiaires, la zone de CL interpolées (qui sont les valeurs provoquant l'erreur sur les niveaux fins) est deux fois moins étendue pour ce cas test que pour le cas test précédent. On peut par exemple comparer le dernier maillage de la figure II.12, qui n'a qu'un seul bord où les CL sont interpolées, et le dernier maillage de la figure II.7 qui a lui deux bords où les CL sont interpolées.

### II.3.4 Conclusion : choix du second membre durant l'étape de prolongement

Comme nous l'avons vu, deux types de second membre durant l'étape de prolongement peuvent être définis selon la façon de considérer le niveau intermédiaire. Si le niveau intermédiaire est vu comme un niveau fin, le second membre utilisé durant l'étape de prolongement restera inchangé au cours des  $\wedge$ -cycles :  $f_{l,p}^k = f_l^0, k \geq 1$ . Si au contraire le niveau intermédiaire est considéré comme un niveau grossier à partir duquel une nouvelle méthode bi-grille est appliquée, le second membre utilisé durant l'étape de prolongement sera égal à celui corrigé durant l'étape de restriction précédente, et sera donc mis à jour au cours des  $\wedge$ -cycles :  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}, k \geq 1$ .

Pour le type de problèmes elliptiques considérés ici, les deux choix conduisent à une précision équivalente sur la solution grossière convergée. Cependant, seul le second membre "corrigé" semble garantir des solutions précises également sur les sous-niveaux. En effet, au vu des résultats présentés ici, les solutions obtenues avec les deux types de second membre ont la même dérivée locale, mais le second membre corrigé semble permettre d'obtenir des CL plus précises sur les sous-niveaux. Cependant ces conclusions sont à confirmer sur d'autres types de cas test.

Comme dans cette étude les valeurs locales sont les valeurs d'intérêt (contrainte maximale dans la gaine par exemple) et que les deux choix sont aussi peu coûteux à appliquer, dans la suite de l'étude nous allons utiliser le second membre "corrigé" durant l'étape de prolongement.

Enfin, nous avons pu remarquer l'équivalence des normes  $L^2$  et  $L^\infty$  discrètes. Dans la suite de l'étude, nous ne nous intéresserons donc plus qu'à une des normes à chaque fois.

### II.3.5 Comportement de la méthode LDC en cours de calcul

Afin d'avoir également une appréciation qualitative des résultats de la méthode LDC, similaire à celle utilisée par les personnes simulant habituellement l'IPG, nous avons regardé la valeur de la contrainte orthoradiale dans la gaine pour le cas 2D(r, $\theta$ ). Cette étude nous permet en particulier d'observer comment évolue la solution au cours des  $\wedge$ -cycles, sur le niveau grossier mais aussi sur les niveaux fins. Le second membre utilisé durant l'étape de prolongement est celui dit "corrigé".

Dans les figures suivantes nous nous focalisons sur l'évolution de la contrainte orthoradiale le long de l'axe de symétrie du fragment de gaine étudié, du côté de la fissure de la pastille. Dans la suite, on note *PGI* le point de l'axe de symétrie situé sur le rayon interne de la gaine et *PGE* le point de l'axe de symétrie situé sur le rayon externe de la gaine. Le maillage LDC utilisé est un maillage assez grossier ( $h_0 = h_i/2$ ) avec 3 sous-niveaux.

Plusieurs évolutions de la contrainte orthoradiale ont été tracées et comparées à la solution de référence. Les figures II.15 et II.16 s'intéressent à l'évolution de la contrainte en fonction du nombre d'itérations sur le niveau grossier et sur le niveau le plus fin (défini ici sur tout l'axe de symétrie) respectivement. Enfin, la figure II.17 représente les contraintes après convergence sur les différents niveaux.

On observe que la solution initiale sur le niveau le plus grossier, avant le premier cycle LDC, est très éloignée de la solution de référence (voir figures II.15 et II.16).

Si on s'intéresse plus particulièrement à la figure II.15, on remarque que la méthode LDC converge



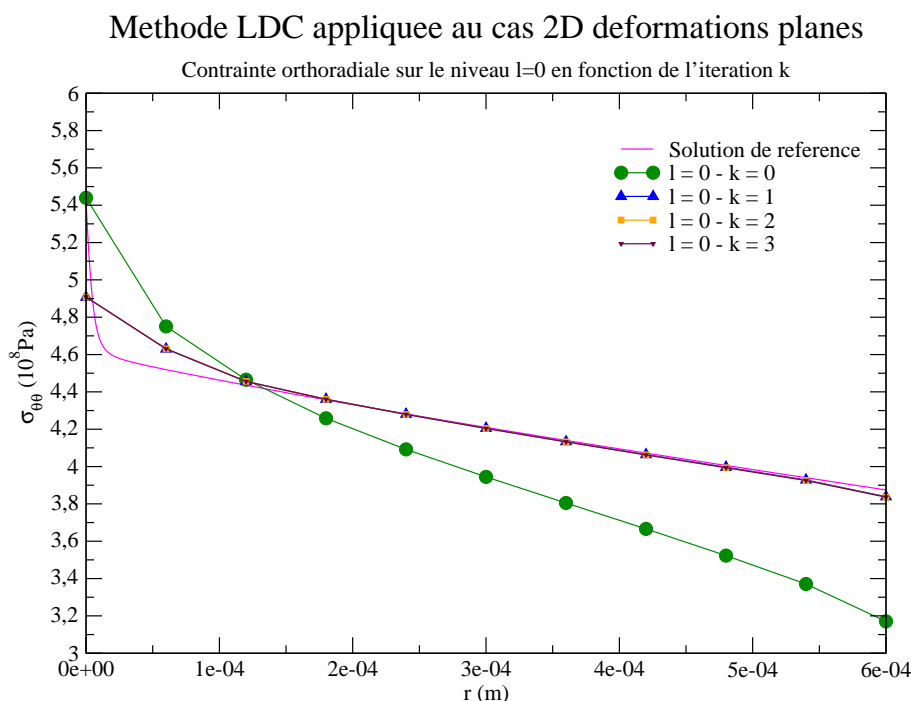


FIGURE II.15 – Contrainte orthoradiale du niveau 0 le long du plan de symétrie en fonction de l'itération de calcul - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

vite, puisque la solution sur le niveau grossier s'améliore fortement dès la première itération. Loin de *PGI*, la solution est bien approximée sur le maillage grossier après convergence. Cependant, autour de *PGI*, même si la solution obtenue est améliorée par la méthode LDC, celle-ci ne représente pas suffisamment précisément le comportement singulier de la contrainte à cet endroit. En effet, ce maillage ne possède pas suffisamment de nœuds pour représenter précisément les phénomènes singuliers.

Si on observe maintenant la figure II.16, on remarque que la solution la plus fine atteint la convergence en 2 itérations, soit plus lentement que le niveau grossier. En effet, entre la résolution initiale sur le niveau grossier et la solution fine obtenue à l'itération 1, seule la discrétisation a changé puisque les CL sont imposées par les niveaux grossiers non encore corrigés. On voit déjà cependant que la solution fine approxime mieux la singularité. Après que le niveau grossier ait été corrigé, de nouvelles CL sont propagées et permettent alors d'obtenir une solution sur le niveau fin très précise, dès la deuxième itération.

Enfin, les résultats de la figure II.17 permettent de confirmer que le raffinement multi-niveaux local permet de mieux capter les singularités locales tout en corrigeant le reste de la solution.

La comparaison de ces figures confirme l'intérêt d'observer la solution composite lorsqu'on s'intéresse à des grandeurs locales.

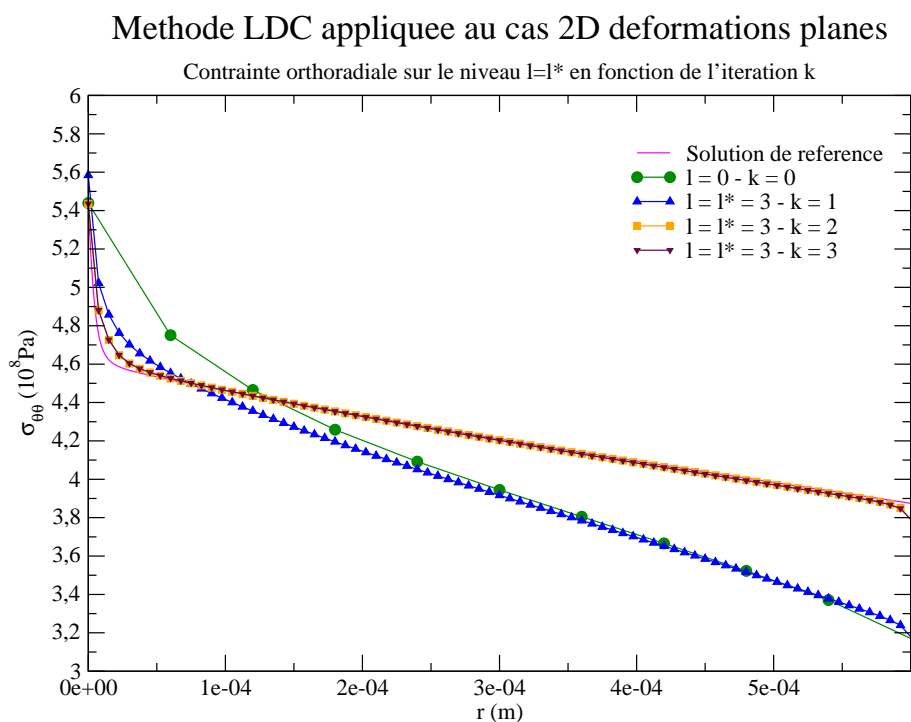


FIGURE II.16 – Contrainte orthoradiale du niveau  $l^*$  le long du plan de symétrie en fonction de l'itération de calcul - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

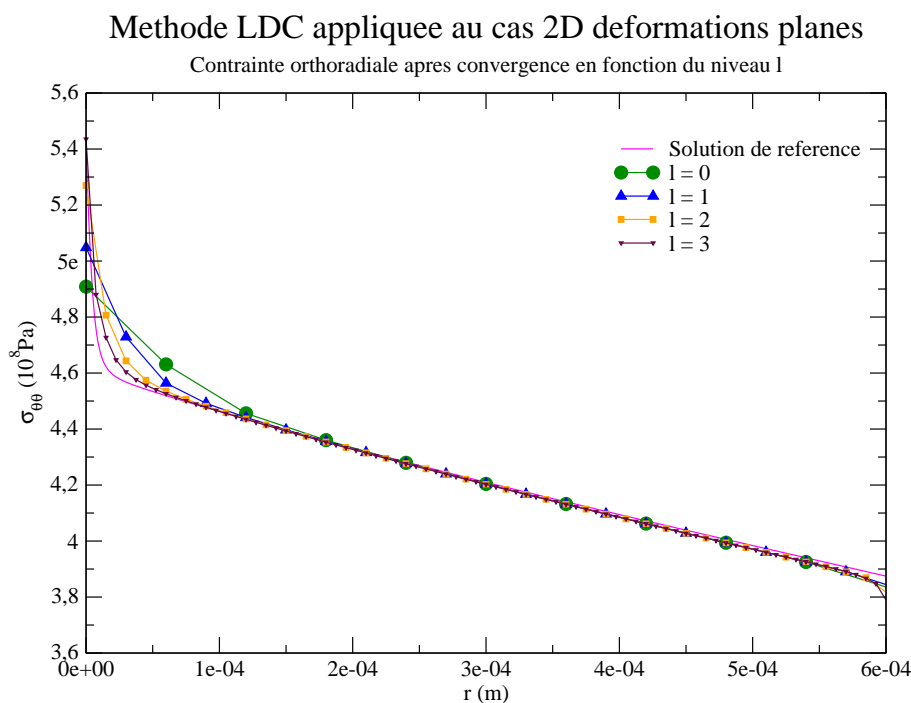


FIGURE II.17 – Contrainte orthoradiale après convergence en fonction du niveau du maillage - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori* -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

## II.4 Optimisation des performances par rapport au nombre de sous-niveaux

Nous avons vu précédemment que la même précision peut être obtenue avec un maillage fin uniforme mono-grille ou avec un maillage global grossier et plusieurs sous-grilles locales si la taille de maille la plus fine est la même. L'étude de performances réalisée dans cette section a pour but d'optimiser, dans une stratégie LDC, le ratio précision obtenue par rapport aux moyens mis en œuvre (temps CPU, espace mémoire).

### II.4.1 Étude du temps CPU

Nous avons tout d'abord étudié le comportement de la norme  $L^2$  relative composite de l'erreur par rapport au temps CPU (voir figure II.18 pour le cas test 2D(r,θ) et figure II.19 pour le cas test 2D(r,z)), avec les mêmes maillages raffinés *a priori* autour de la discontinuité de pression que dans les études II.3.2 et II.3.3 (voir figures II.7 et II.12). Par ailleurs, au cours de l'étape de prolongement, le second membre "corrigé" sera utilisé.

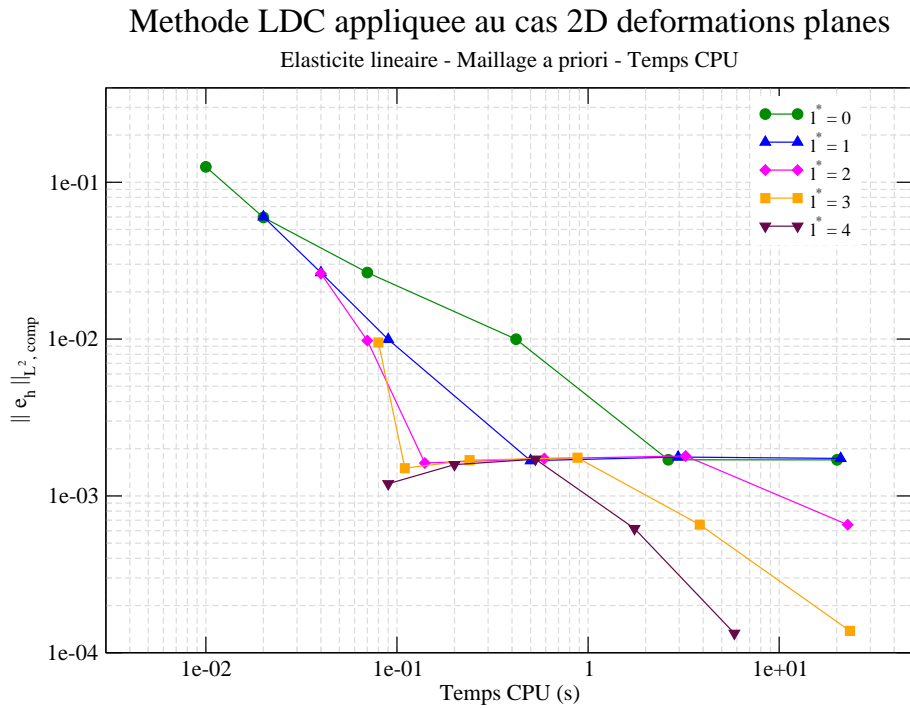


FIGURE II.18 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction du temps CPU - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori*

Dans le cas 2D(r,θ), il est quasiment tout de suite intéressant en terme de temps CPU d'appliquer la méthode LDC. De plus, plus la précision souhaitée diminue, plus l'intérêt d'ajouter des sous-niveaux est visible. En effet, par exemple pour obtenir une erreur de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-2}$ , il faut presque deux fois moins de temps avec  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 1$  qu'avec  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 0$ , mais l'apport de  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 2$  n'est pas flagrant. Alors que pour une erreur de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-3}$ , le temps CPU est divisé par 5.2 si on utilise  $h_0 = h_i/8$  et  $l^* = 1$  plutôt que  $h_0 = h_i/16$  et  $l^* = 0$  et divisé par 18.8 si on utilise  $h_i/4$  et  $l^* = 2$ , et même divisé par 29.2 si on utilise  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 4$ .

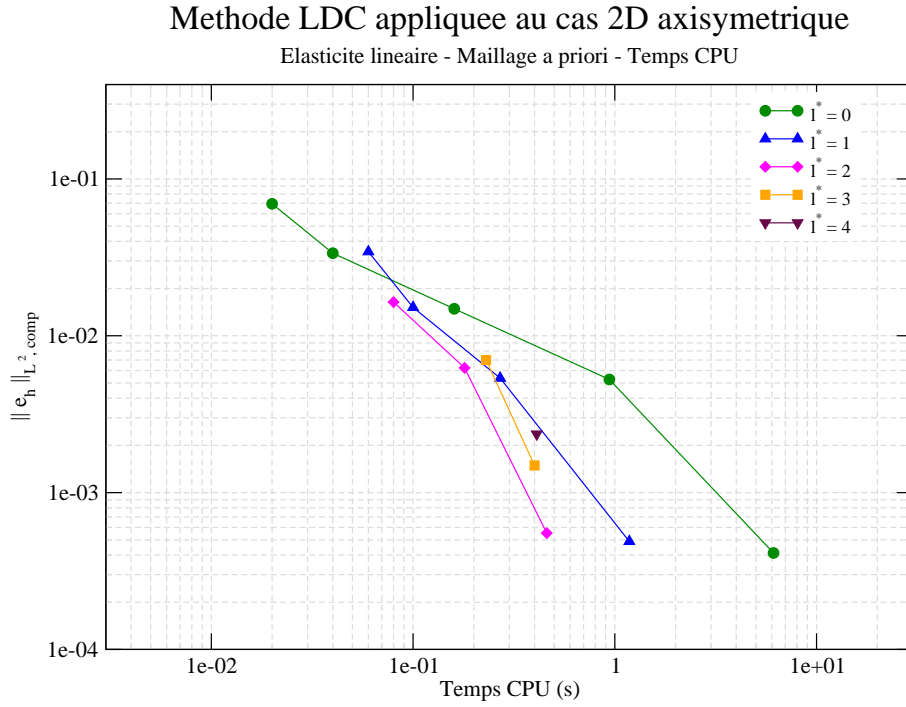


FIGURE II.19 – Norme  $L^2$  relative composite de l’erreur en fonction du temps CPU - Cas 2D(r,z)  
- Élasticité linéaire - Maillage *a priori*

Dans le cas 2D(r,z), l’utilisation de la méthode LDC devient intéressante pour des erreurs de l’ordre de  $2 \cdot 10^{-2}$ . En effet, pour cette erreur, l’utilisation d’un maillage de taille  $h_i/2$  et d’un sous-niveau permet d’économiser un tiers du temps de calcul par rapport à l’utilisation d’un maillage mono-grille de taille  $h_i/4$ . Cependant, il ne semble pas intéressant ici d’utiliser plus de 2 sous-niveaux de raffinement. Cette différence de comportement en temps CPU par rapport au cas 2D(r, $\theta$ ) semble provenir de l’erreur de pollution qui rend l’intérêt des sous-niveaux moins visible puisque l’erreur de discrétisation ne diminue plus.

A partir de ces courbes, nous pouvons conclure que plus la précision souhaitée est importante, plus il est avantageux d’un point de vue du temps de calcul d’utiliser un maillage initial grossier avec de nombreux sous-niveaux, tant que l’erreur de pollution n’est pas atteinte. Dans ce cas, un maillage initial plus raffiné doit être utilisé pour continuer à faire diminuer l’erreur. Ce comportement est assez cohérent avec la littérature, voir les résultats obtenus dans [Ramière *et al.*, 2007b] pour la méthode FIC par exemple.

## II.4.2 Étude de l’espace mémoire

Nous avons ensuite étudié le comportement de la norme  $L^2$  relative composite de l’erreur par rapport au nombre total de nœuds (somme de tous les niveaux, voir les figures II.20 et II.21), toujours pour les cas test 2D(r, $\theta$ ) et 2D(r,z) sous les mêmes conditions (maillage raffiné *a priori* et second membre “corrigé”).

La tendance générale des résultats est la même que pour le temps CPU : l’utilisation d’un maillage initial grossier et de nombreuses sous-grilles est de plus en plus intéressant à mesure que l’erreur à atteindre diminue.

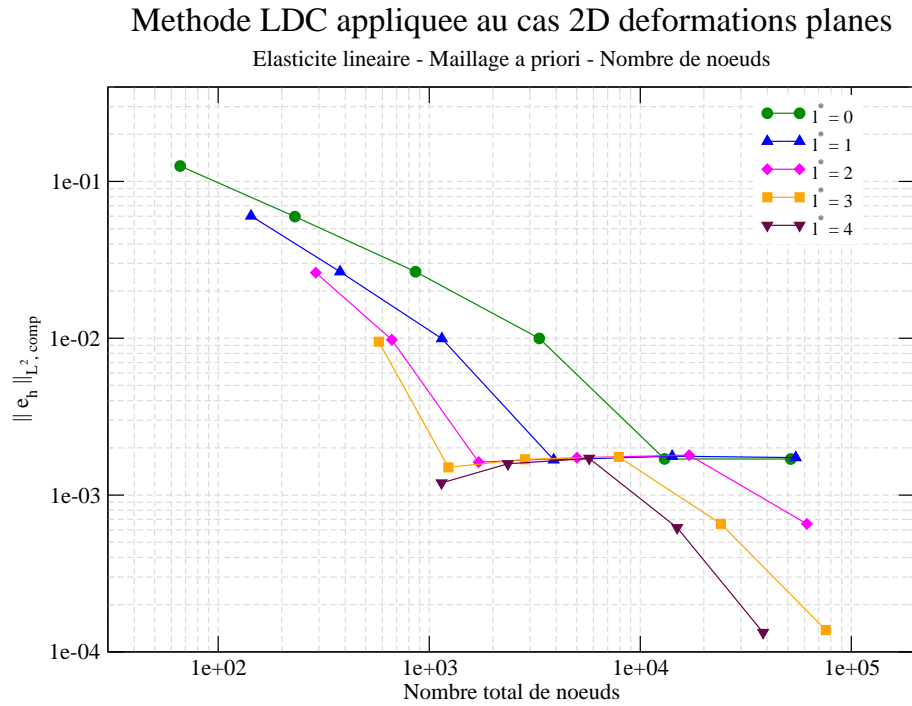


FIGURE II.20 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction du nombre de nœuds total (somme de tous les niveaux) - Cas 2D(r,  $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori*

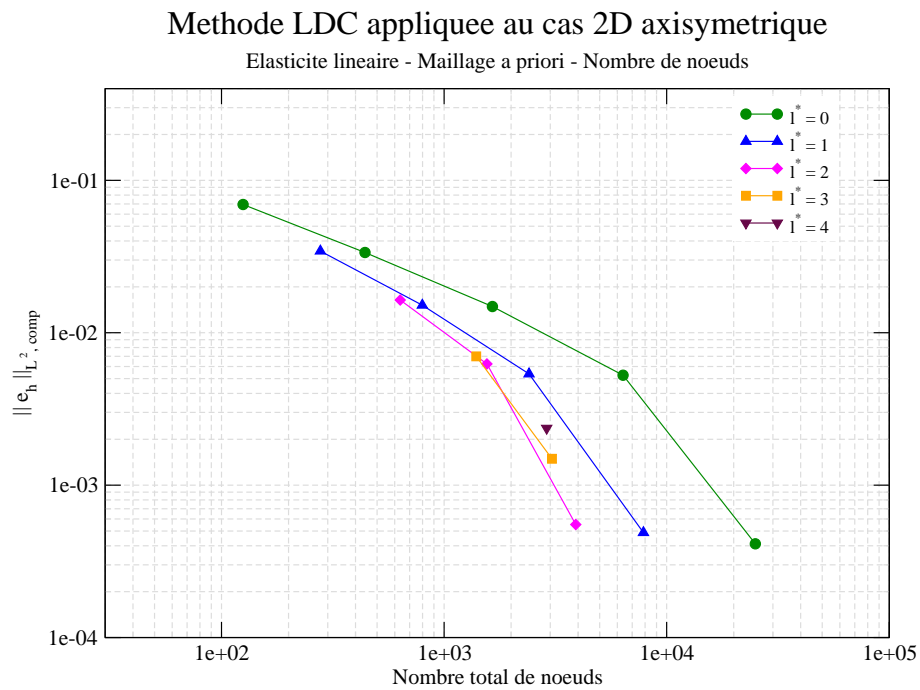


FIGURE II.21 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction du nombre de nœuds total (somme de tous les niveaux) - Cas 2D(r, z) - Élasticité linéaire - Maillage *a priori*

Pour le cas  $2D(r, \theta)$ , les gains sont plus importants pour les fortes erreurs et moins importants pour les petites erreurs que ceux en temps CPU. Par exemple, pour une erreur de  $3 \cdot 10^{-2}$  la méthode LDC appliquée avec  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 2$  nécessite 3 fois moins d'éléments sur l'ensemble des sous-niveaux que  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 0$  et 1.3 fois moins d'éléments que  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 1$ , alors que pour une erreur de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-3}$ , le choix d'un unique maillage fin ( $h_0 = h_i/16$ ) conduit à l'utilisation de 7.6 fois plus de nœuds que le maillage  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2$  et même 11 fois plus de nœuds que si un maillage grossier ( $h_0 = h_i$ ) et de nombreux sous-niveaux ( $l^* = 4$ ) avaient été utilisés.

Pour de fortes erreurs et donc de faibles nombres de nœuds, les temps de calcul sont très faibles. La différence de nombre de nœuds a ainsi un impact plus faible. Dès que le nombre de nœuds devient conséquent (supérieur à 1000), il influence plus le temps CPU. La corrélation directe nombre de nœuds / temps CPU n'est pas vraie puisque l'intérêt d'utiliser des sous-niveaux provient du fait que tous les nœuds de calcul ne sont jamais traités en même temps. Ainsi, un gain sur le nombre total de nœuds implique un gain plus important du nombre de nœuds sur chaque niveau (en particulier sur le niveau 0 qui est en général le plus coûteux) et donc un gain en temps de calcul plus important. Cet effet est amplifié du fait que les  $\wedge$ -cycles sont peu coûteux quel que soit le nombre de sous-niveaux après la première phase de prolongement (cf. section II.2.2). En effet, la matrice de rigidité factorisée (qui représente la majorité du coût de résolution) est conservée et les opérations de prolongement et de restriction sont peu coûteuses.

Pour le cas  $2D(r, z)$ , l'utilisation de la méthode LDC conduit dès les premiers niveaux d'erreurs à un gain en nombre de nœuds plus marqué que pour le temps CPU. De plus, il est toujours intéressant d'utiliser de nombreux sous-niveaux, sauf lorsque l'erreur de pollution est atteinte. Dans ce cas, le raffinement de maillage ne conduit plus à améliorer la solution alors que le nombre de nœuds continue d'augmenter. Ainsi, l'utilisation d'un maillage de taille  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 2$  nécessite 1.3 fois moins d'éléments que l'utilisation d'un maillage de taille  $h_i/2$  et  $l^* = 1$  et 2.6 fois moins d'éléments qu'un maillage mono-grille de taille  $h_i/4$ , ces trois calculs conduisant à une erreur de  $1.5 \cdot 10^{-2}$ . Cet écart s'accroît avec la précision voulue. Cependant, lorsque l'erreur de pollution est atteinte, l'utilisation de sous-niveaux a moins d'intérêt. Ainsi, un maillage de taille  $h_i/2$  et  $l^* = 3$  nécessite 1.3 fois moins d'éléments qu'un maillage de taille  $h_i/4$  et  $l^* = 2$ , mais obtient une erreur 2.7 fois plus grande. Par contre, le maillage de taille  $h_i/4$  et  $l^* = 2$ , pour lequel l'erreur de pollution n'est pas encore atteinte, possède 2 fois moins d'éléments qu'un maillage de taille  $h_i/8$  et  $l^* = 1$  et 6.4 fois moins qu'un maillage mono-grille de taille  $h_i/16$ , tous les trois conduisant à une erreur d'environ  $5 \cdot 10^{-4}$ .

En conclusion, quel que soit le cas test, la méthode LDC est intéressante en nombre de nœuds par rapport à un maillage mono-grille et le fait d'ajouter des sous-niveaux accentue cette tendance tant que l'erreur de pollution n'est pas atteinte.

### II.4.3 Conclusion : intérêt des sous-niveaux

Ces deux études nous montrent que la stratégie optimale en termes de nombre de nœuds et de temps CPU pour utiliser la méthode LDC est de partir d'un maillage assez grossier et d'utiliser de nombreux sous-niveaux. Cette stratégie est d'autant plus intéressante que la précision demandée devient de plus en plus importante.

Une fois l'erreur de pollution atteinte, il faut alors partir d'un maillage de départ plus raffiné.

## Conclusion

Les premiers résultats obtenus avec la méthode LDC sont très satisfaisants. L'ordre de convergence théorique optimal attendu est atteint. En effet, la méthode LDC converge pour les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  en  $O(d_{h_{fin}})$ , où  $d_{h_{fin}}$  est la distance sur le maillage local le plus fin entre la singularité réelle et son approximation.

Les deux possibilités concernant le choix du second membre durant l'étape de prolongement, selon la façon de percevoir les niveaux intermédiaires, conduisent aux mêmes résultats si on ne s'intéresse qu'à la solution corrigée sur le niveau grossier. Cependant, le second membre obtenu en considérant le niveau intermédiaire comme un niveau grossier a été retenu pour la suite de l'étude, car le fait de mettre à jour le second membre au cours des  $\Lambda$ -cycles permet de corriger précisément également les solutions de tous les sous-niveaux.

Enfin, après étude du nombre de nœuds et du temps CPU nécessaires pour atteindre une erreur voulue, nous pouvons conclure qu'il est plus intéressant (tant que l'erreur de pollution n'est pas atteinte) d'un point de vue de l'espace mémoire comme d'un point de vue du temps de calcul, de partir d'un maillage grossier et de créer de nombreux sous-niveaux plutôt que de partir directement d'un maillage assez fin.

Dans la suite de l'étude, nous allons nous intéresser à l'automatisation du processus de détection des zones de raffinement, afin d'être indépendant du problème traité.





## Chapitre III

# Automatisation de la procédure de raffinement

### Sommaire

---

Introduction . . . . .	69
III.1 Combinaison de LDC avec l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> de Zienkiewicz et Zhu	69
III.1.1 Stratégie utilisée . . . . .	69
III.1.2 Cas 2D(r,z) : mise en diabololo . . . . .	72
III.1.3 Cas 2D(r,θ) : fissuration de la pastille . . . . .	76
III.1.4 Conclusion : obtention d'un critère générique . . . . .	79
III.2 Influence du rapport de raffinement . . . . .	81
III.2.1 Convergence en maillage pour $r = 4$ . . . . .	81
III.2.2 Performances de la méthode LDC en fonction du rapport de raffinement	83
III.3 Apport dans le cas 3D multi-singularités . . . . .	85
III.3.1 Étude de convergence . . . . .	85
III.3.2 Intérêt des maillages réguliers . . . . .	87
III.3.3 Conclusion . . . . .	89
III.4 Comparaison avec d'autres méthodes de raffinement local . . . . .	91
III.4.1 Cycles FMG locaux . . . . .	91
III.4.2 Raffinement h-adaptatif global . . . . .	94
III.4.3 Raffinement h-adaptatif local . . . . .	102
Conclusion . . . . .	109

---



## Introduction

Nous avons vérifié au chapitre précédent l'utilisation de la méthode LDC en mécanique linéaire des solides. Le but du présent chapitre est de proposer une méthode permettant d'automatiser la procédure de génération des sous-niveaux afin d'être indépendant de la connaissance de l'utilisateur. Pour cela, nous combinons la méthode LDC avec l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu (ZZ). Nous vérifions dans un premier temps que cette combinaison conduit aux résultats attendus pour les cas 2D. Nous nous intéressons ensuite au cas 3D multi-singularités, afin de vérifier la pertinence de ce couplage sur des problèmes complexes. Puis nous étudions l'influence du rapport de raffinement sur les performances de la méthode. Pour finir, nous comparons notre outil combinant LDC et estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec d'autres stratégies de raffinement local existant dans la littérature.

Une partie des résultats qui suivent ont été publiés dans [Barbié et Ramière, 2012] et [Barbié *et al.*, 2014].

### III.1 Combinaison de LDC avec l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu

Comme exposé en introduction, nous nous intéressons ici à l'automatisation de la détection des zones d'intérêt et ce pour deux raisons. Tout d'abord, nous avons vu dans la partie précédente que l'erreur de discrétisation obtenue après convergence de la méthode LDC peut atteindre l'erreur de pollution et donc stagner malgré le raffinement de maillage. Nous avons supposé que dans notre cas l'erreur de pollution était due à l'erreur de discrétisation de la partie non raffinée du maillage. Pour une précision donnée, nous voulons donc pouvoir déterminer les zones optimales à raffiner. Ceci permettrait de rendre la méthode générique et indépendante d'études d'ingénierie préliminaires. De plus, nous aimerions à terme pouvoir simuler des singularités mobiles au cours du temps et donc avoir des zones de raffinement qui s'ajustent automatiquement.

Dans ce contexte, nous avons décidé d'utiliser un estimateur d'erreur *a posteriori* (voir section I.3.2). Nous avons vu que la méthode LDC pouvait se combiner aisément avec n'importe quel outil existant. Le choix de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ne sera donc pas contraint par la méthode LDC. Parmi les estimateurs exposés précédemment, celui basé sur le lissage des contraintes proposé par Zienkiewicz et Zhu (ZZ), voir [Zienkiewicz et Zhu, 1987] et section I.3.2 est le plus utilisé dans les logiciels de simulation en raison de sa simplicité de mise en œuvre, de son rapport qualité/coût et de ses bons résultats. Il est en particulier déjà implanté dans le code EF CAST3M [CAST3M, 2013] utilisé dans cette thèse. C'est pourquoi nous avons décidé d'utiliser cet estimateur d'erreur *a posteriori*.

#### III.1.1 Stratégie utilisée

Afin de générer automatiquement les grilles locales de la méthode LDC dans les zones où l'erreur de discrétisation est maximale, nous avons décidé d'appliquer récursivement un estimateur d'erreur durant la première étape de prolongement afin d'obtenir chaque nouvelle grille fine. Les grilles ainsi générées seront alors conservées jusqu'à convergence des  $\wedge$ -cycles.

Lorsque la méthode LDC est couplée avec un processus de raffinement automatique, quel qu'il soit, l'algorithme LDC est donc modifié sous la forme suivante :

---

**Algorithme III.1 : Méthode LDC multi-grilles pour l'élasticité linéaire, avec second membre corrigé dans l'étape de prolongement et raffinement automatique avec estimateur d'erreur**

---

– **Initialisation :**

- Calcul de la solution  $[U_0^0]$

$$[K_0][U_0^0] = [F_0^0] + [G_0]$$

$$[H_0][U_0^0] = [U_{D,0}] \text{ sur } \Gamma_{U,0}$$

– **Itérations :** Calcul de  $[U_l^k]$

Pour  $k = 1$  à  $k^*$

–  $[U_0^k] = [U_0^{k-1}]$

– **Prolongement de  $l - 1$  à  $l$  : Résolution sur les grilles fines  $G_1$  :**

Pour  $l = 1$  à  $l^*$

– Si ( $k = 1$ ) : **Initialisation des sous-niveaux**

- (i) Application de l'estimateur d'erreur sur la solution  $[U_{l-1}^1]$  afin de détecter la zone à raffiner
- (ii) Raffinement de la zone détectée avec un rapport  $r_l$
- (iii) Définition des valeurs des CL du problème continu sur  $\Gamma_l \cap \partial\Omega$  :  $[G_l]$  et  $[U_{D,l}]$ , qui seront inchangées au cours des itérations LDC
- (iv) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_{l-1}^1]$

$$[U_{D,l}^1] = [P_{l-1}^1][U_{l-1}^1] \text{ sur } \Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$$

Réalisé en pratique grâce aux fonctions de forme

- (v) Calcul de  $[U_l^1]$  en résolvant :

$$[K_l][U_l^1] = [F_{l,p}^1] + [G_l] = [F_l^0] + [G_l]$$

$$[H_l][U_l^1] = [U_{D,l}^1] \text{ sur } \Gamma_{U,l}$$

– Sinon

- (i) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_{l-1}^k]$

$$[U_{D,l}^k] = [P_{l-1}^k][U_{l-1}^k] \text{ sur } \Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$$

Réalisé en pratique grâce aux fonctions de forme

- (ii) Calcul de  $[U_l^k]$  en résolvant :

– Si ( $l = l^*$ )

$$[K_{l^*}][U_{l^*}^k] = [F_{l^*,p}^k] + [G_{l^*}] = [F_{l^*}^0] + [G_{l^*}]$$

$$[H_{l^*}][U_{l^*}^k] = [U_{D,l^*}^k] \text{ sur } \Gamma_{U,l^*}$$

– Sinon

$$[K_l][U_l^k] = [F_{l,p}^k] + [G_l] = [F_l^0] + [D_l^{k-1}] + [G_l] = [F_{l,r}^{k-1}] + [G_l]$$

$$[H_l][U_l^k] = [U_{D,l}^k] \text{ sur } \Gamma_{U,l}$$

– **Restriction de  $l + 1$  à  $l$  : Correction des grilles grossières  $G_l$  :**

Pour  $l = l^* - 1$  à 0

(i) Restriction de la solution fine  $[U_{l+1}^k]$  sur  $A_l$  :

$$[\tilde{U}_l^k] = [R_{l+1}^l][U_{l+1}^k] \quad \text{sur } A_l$$

(ii) Calcul du résidu local  $[D_l^k]$  à partir des efforts initiaux :

$$[D_l^k] = [K_l][\tilde{U}_l^k] - [F_l^0] - [G_l] \quad \text{sur } \mathring{A}_l$$

$$[D_l^k] = 0 \quad \text{ailleurs}$$

(iii) Correction du second membre  $[F_{l,r}^k]$  :

$$[F_{l,r}^k] = [F_l^0] + [D_l^k]$$

(iv) Correction de  $[U_l^k]$  en résolvant :

$$[K_l][U_l^k] = [F_{l,r}^k] + [G_l]$$

$$[H_l][U_l^k] = [U_{D,l}^k] \quad \text{sur } \Gamma_{U,l}$$

Nous utilisons ici l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ afin d'automatiser la détection des zones à raffiner. À titre d'exemple, sur la figure III.1 l'erreur locale estimée par l'estimateur ZZ pour le cas test 2D(r,z) est tracée pour un maillage grossier initial de taille de maille uniforme  $h_i/2 = 163.5 \mu m$ .

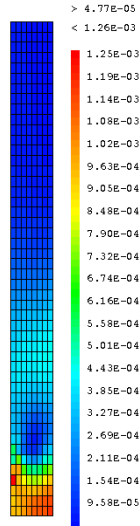


FIGURE III.1 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2 = 163.5 \mu m$

Nous pouvons remarquer que l'erreur locale estimée par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ est très largement inférieure à l'erreur de discrétisation maximale calculée dans la partie précédente. En

effet, les erreurs estimées sont situées entre  $5 \cdot 10^{-5}$  et  $1 \cdot 10^{-3}$ , alors que l'erreur maximale obtenue pour ce maillage est de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-2}$ , voir le tableau II.2 p.51. Ceci s'explique par le fait que l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ ne tient compte que de la régularité des contraintes. Il n'est pas en moyen de mesurer l'erreur due à la position de la singularité. Nous ne pouvons donc pas utiliser directement les valeurs fournies par cet estimateur et appliquer la méthodologie classique consistant à raffiner tous les éléments possédant une erreur estimée supérieure à l'erreur voulue fixée par l'utilisateur.

Cependant, nous avons choisi ici d'utiliser l'estimateur ZZ de manière détournée puisque la singularité locale va générer un fort gradient de contraintes qui devrait être détecté par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ.

Nous avons donc opté pour une autre méthodologie de détection assez classique. Pour chaque niveau  $l$ , nous raffinons les éléments  $L$  de la grille  $G_l$  pour lesquels l'erreur ZZ locale  $e_L$  vérifie :

$$e_L > \alpha \left( \max_{K \subset G_l} e_K - \min_{K \subset G_l} e_K \right) \quad (\text{III.1})$$

avec

$$0 \leq \alpha \leq 1, \alpha \text{ une constante donnée}$$

Pour générer récursivement un ensemble de maillages imbriqués, nous allons utiliser un critère  $\alpha$  constant quel que soit le niveau.

Le second membre de l'équation (III.1) permet de toujours détecter des éléments à raffiner, même quand la solution est lisse ou que le critère  $\alpha$  vaut 1. Nous avons cependant défini un nombre minimum d'éléments nécessaires afin de construire une nouvelle sous-grille locale (typiquement  $2^D$  avec  $D$  la dimension de l'espace), car la méthode LDC ne corrige pas suffisamment la solution si les zones raffinées contiennent trop peu d'éléments. Compte-tenu de la définition de  $\hat{A}_l$  et  $A_l$  (voir section II.1.2.c), nous avons également décidé d'élargir la zone de raffinement ainsi déterminée afin de conserver tous les éléments détectés dans la zone de restriction  $\hat{A}_l$ .

Plus  $\alpha$  sera petit, plus le nombre d'éléments à raffiner sera important. Dans la suite, nous allons chercher la valeur optimale de  $\alpha$ , c'est-à-dire la plus grande valeur de  $\alpha$  (i.e. le nombre minimal d'éléments) permettant d'atteindre le niveau d'erreur attendu.

Avec cette stratégie, nous avons donc besoin de moins de niveaux de raffinement qu'avec un indicateur d'erreur basé sur la comparaison de deux niveaux ([Biotteau *et al.*, 2012] par exemple) pour lequel le niveau  $l$  est finalement obtenu à partir du niveau  $l - 2$ .

### III.1.2 Cas 2D(r,z) : mise en diabolio

En appliquant la formule de détection sur le champ ZZ obtenu à chaque niveau (voir figure III.1 par exemple), nous pouvons remarquer que les zones détectées automatiquement (voir la figure III.2, gauche) ne conduisent pas toujours à des maillages structurés. Afin de garder les avantages des maillages réguliers structurés (formulation naturelle des tenseurs, bonnes propriétés de convergence, ...), nous avons décidé d'ajouter quelques éléments sur chaque maillage afin de les rendre structurés (voir la figure III.2, droite).

De plus, le fait d'utiliser des maillages structurés évite de créer des singularités artificielles (de type coin rentrant), qui peuvent être ensuite détectées par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ. Nous pouvons par exemple comparer l'erreur estimée par ZZ sans structuration (figure III.3(a)) ou avec

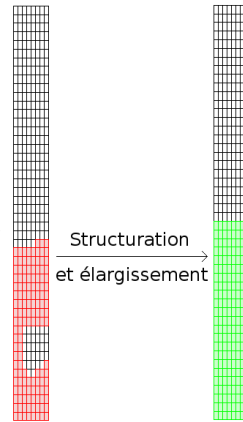


FIGURE III.2 – Exemple de zones détectées (en rouge) et modification afin d'obtenir un maillage structuré (en vert) - Cas 2D(r,z)-  $h_0 = h_i/2$  et  $l = 1$

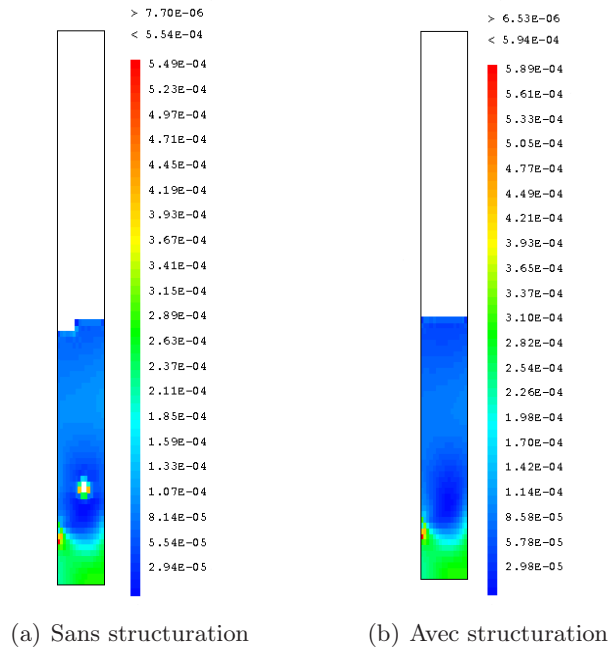


FIGURE III.3 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec et sans structuration du maillage - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l = 1$

(figure III.3(b)).

L'algorithme de structuration consiste à déterminer le rectangle minimum englobant strictement la zone détectée. L'élargissement lié à la définition de la zone  $\hat{A}_l$  est ensuite réalisé. Chaque zone structurée ainsi obtenue est ensuite traitée comme une nouvelle sous-grille. Si plusieurs zones à raffiner indépendantes sont détectées, chacune est traitée séparément. Les zones détectées dans le cas d'une seule singularité locale se prêtent généralement bien à l'encadrement par une seule zone rectangulaire. Cependant, cet algorithme peut ne pas être optimal en termes de nombre de nœuds si la zone détectée est vraiment biscornue. L'utilisation de patches, assez classique dans la littérature [Berger et Olinger, 1984, Anthonissen *et al.*, 2005, Borrel *et al.*, 2006], peut alors s'avérer bien plus optimale.

Sur la figure III.4, nous avons étudié la norme  $L^2$  relative composite de l'erreur de la méthode LDC en fonction du critère de raffinement  $\alpha$  choisi pour la détection automatique des zones à raffiner à l'aide de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ. La taille de maille initiale  $h_i$  est la même que dans le chapitre II ( $h_i = 327 \mu m$ ).

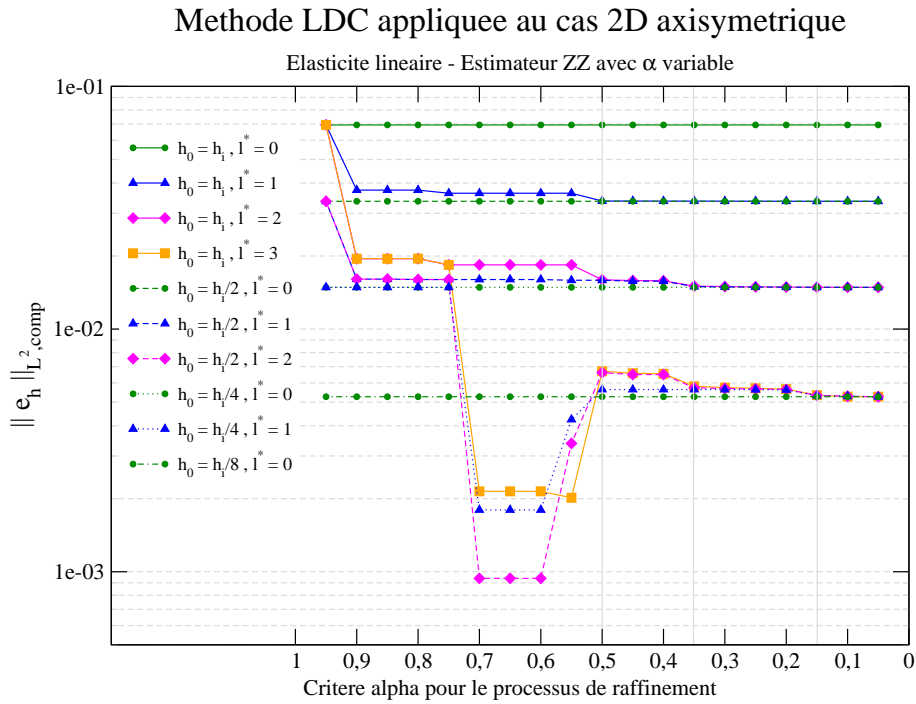


FIGURE III.4 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction du critère  $\alpha$  utilisé dans le processus de raffinement - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire

Tout d'abord, nous pouvons voir que les erreurs convergent bien vers les valeurs attendues, à savoir l'erreur du maillage mono-grille uniforme obtenue pour la même taille de maille la plus fine.

De plus, pour obtenir un premier niveau de raffinement optimal, un critère  $\alpha$  différent est nécessaire selon l'erreur voulue (par exemple,  $\alpha_{opt} = 0.5$  pour une erreur voulue de  $3 \cdot 10^{-2}$  et  $\alpha_{opt} = 0.15$  pour une erreur voulue de  $5 \cdot 10^{-3}$ ). Le critère de raffinement n'est donc pas dépendant du niveau à générer.

Cependant, il semble exister un critère de raffinement optimal  $\alpha_{opt}$  pour chaque niveau d'erreur



attendue, indépendamment du nombre de sous-grilles utilisées et de la taille de maille initiale. Ainsi, un unique  $\alpha$  dépendant seulement de la précision voulue sera utilisé pour tous les niveaux de raffinement. Cependant, une corrélation simple entre la valeur optimale de  $\alpha$  et le niveau d'erreur voulue n'apparaît pas clairement ici.

Nous pouvons remarquer que pour des niveaux d'erreurs faibles, de grandes valeurs de  $\alpha$  conduisent à des erreurs plus petites qu'avec un raffinement global. Ce phénomène a déjà été observé dans la littérature, voir [Khadra *et al.*, 1996] par exemple. Cependant, ces valeurs de  $\alpha$  ne seront pas retenues puisqu'elles ne permettent pas d'atteindre la valeur asymptotique de l'erreur.

En utilisant les valeurs optimales obtenues pour  $\alpha$  par l'étude précédente, les zones de raffinement obtenues sont plus larges que celles définies *a priori* dans le chapitre II. Pour s'en convaincre, on peut par exemple comparer les maillages imbriqués présentés figure III.5 à ceux de la figure II.7 p.49 qui sont générés à partir du même maillage initial. Cela confirme que la stagnation observée dans l'étude précédente (cf. figures II.8 et II.9) était liée à une zone de raffinement qui n'était pas assez large compte-tenu de la précision attendue.

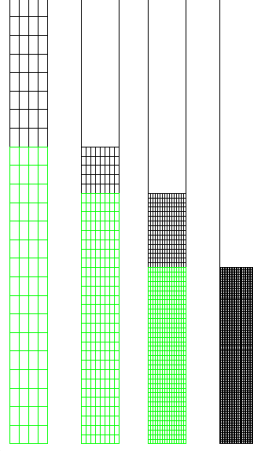


FIGURE III.5 – Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.15$  (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i = 327 \mu\text{m}$  et  $l^* = 3$

Les maillages optimaux obtenus semblent montrer que l'effet de la singularité n'est pas très localisé. Cependant, si nous regardons plus attentivement la figure III.4, nous pouvons voir que la convergence asymptotique en  $\alpha$  est très lente. Dans un contexte industriel, nous pourrions donc choisir d'être moins stricts sur la valeur de  $\alpha$ . Par exemple, avec une marge de 10% sur la précision voulue, nous pouvons économiser jusqu'à 50% d'éléments à raffiner.

En utilisant un critère de raffinement optimal, la convergence en maillage de la méthode LDC pour la norme  $L^\infty$  relative composite est présentée dans le tableau III.1. Nous avons ici de nouveau comparé les deux choix concernant le second membre durant l'étape de prolongement afin d'être sûrs que les conclusions de la section II.3 restaient vraies avec des zones de raffinement plus larges.

En comparant le tableau III.1 au tableau II.2 p.51, on voit clairement qu'un meilleur choix des zones de raffinement a un effet bénéfique sur les deux versions de la méthode LDC. En particulier, la modification des zones de raffinement a conduit à des maillages locaux avec moins de bords

$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$ selon le second membre durant l'étape de prolongement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i$	$1.14 \cdot 10^{-1}$	$5.78 \cdot 10^{-2}$	'i' : $2.83 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $2.63 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.10 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $9.66 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.04 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $7.95 \cdot 10^{-4}$
$h_i/2$	$5.77 \cdot 10^{-2}$	$2.62 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.05 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $9.67 \cdot 10^{-3}$	'i' : $2.04 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $7.95 \cdot 10^{-4}$	
$h_i/4$	$2.62 \cdot 10^{-2}$	$9.67 \cdot 10^{-3}$	'i' : $1.08 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $7.95 \cdot 10^{-4}$		
$h_i/8$	$9.65 \cdot 10^{-3}$	$8.03 \cdot 10^{-4}$			
$h_i/16$	$7.97 \cdot 10^{-4}$				

TABLE III.1 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha$  optimal - Comparaison entre le second membre "initial" ('i' :  $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ('c' :  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

où les CL sont interpolées que lors des maillages définis *a priori* autour de la singularité. Comme nous avons vu que la différence entre les deux seconds membres impactait principalement les valeurs de Dirichlet interpolées, la solution composite obtenue à présent est moins influencée par le choix du second membre durant l'étape de prolongement. Cependant, le second membre "initial" ne permet toujours pas d'atteindre les niveaux d'erreur les plus fins. En effet, une stagnation de l'erreur composite maximale commence à apparaître (dès des erreurs inférieures à  $1 \cdot 10^{-3}$ ) pour le second membre "initial" alors que la précision optimale en  $O(d_{h_{fin}})$  est obtenue pour le second membre "corrigé". Ainsi, l'utilisation du second membre "initial" durant l'étape de prolongement semble toujours conduire à une stagnation plus précoce du point de vue de la norme composite de l'erreur que l'utilisation du second membre "corrigé".

### III.1.3 Cas 2D(r,θ) : fissuration de la pastille

Nous avons ensuite réalisé la même étude pour le cas test 2D déformations planes. Dans ce cas, la zone sur laquelle l'erreur obtenue à l'aide de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ est importante est beaucoup plus localisée, y compris pour un maillage initial grossier, voir la figure III.6 par exemple. Cette localisation peut s'expliquer par le fait que la structure est trois fois moins étirée que dans l'étude précédente et que la discontinuité est localisée plus près du plan de symétrie.

Comme la zone contenant de fortes erreurs est très restreinte et qu'un nombre minimal d'éléments détectés a été imposé afin de créer un nouveau niveau, la modification du critère de raffinement  $\alpha$  modifie également le nombre de sous-grilles générées, en particulier pour les maillages initiaux les plus grossiers. La figure III.7 montre l'influence du critère de raffinement sur la norme  $L^2$  relative composite de l'erreur de la méthode LDC. Dans ce cas, le pas du maillage initial  $h_i$  est de  $218 \mu m$ .

Comme pour le cas 2D(r,z), pour tous les cas, le critère optimal semble uniquement dépendre de l'erreur voulue. Cependant, les valeurs optimales obtenues par niveau d'erreur ne sont pas similaires à celles obtenues pour le cas test précédent (voir la figure III.4 p.74). Les valeurs optimales de  $\alpha$  semblent donc dépendre également du type de singularité étudiée.

Un exemple de maillages imbriqués optimaux est disponible figure III.8.

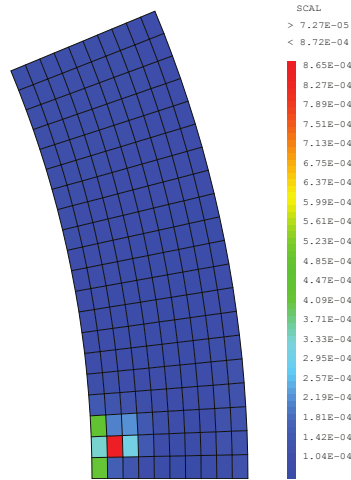


FIGURE III.6 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2 = 109 \mu\text{m}$

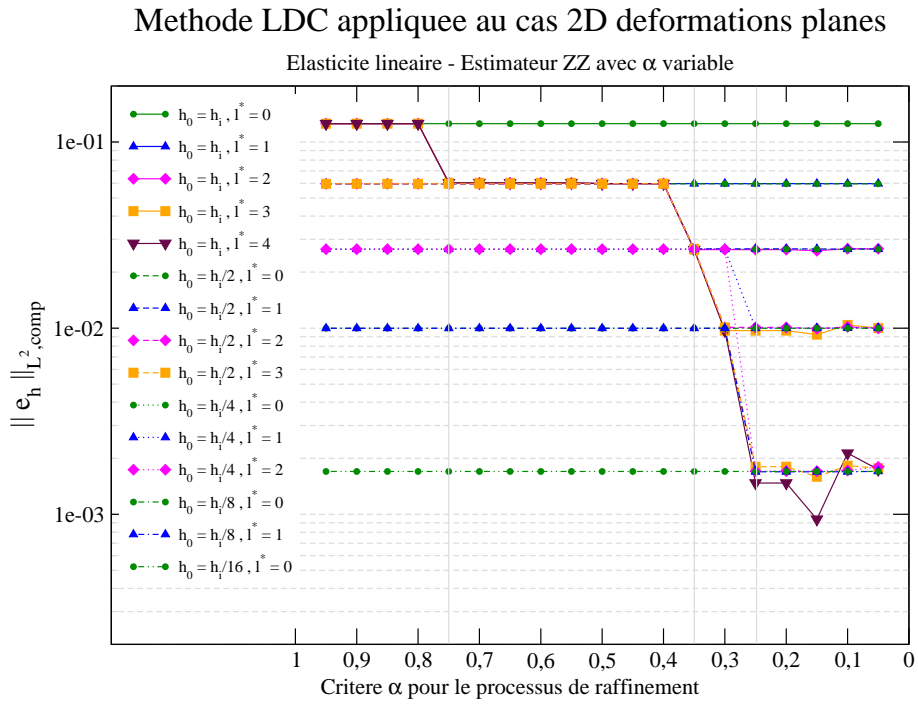


FIGURE III.7 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction du critère  $\alpha$  utilisé durant le processus de raffinement - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire

Nous pouvons observer que les maillages optimaux obtenus sont très localisés, bien plus que ceux obtenus pour le cas 2D( $r, z$ ). Ainsi, l'utilisation d'un estimateur d'erreur *a posteriori* permet d'obtenir dans ce cas des zones optimales plus petites que celles choisies *a priori* (voir figure II.12 p.55) et donc d'améliorer d'autant plus les performances de la méthode.

Les résultats de l'étude de convergence en maillage pour la norme maximale relative composite de

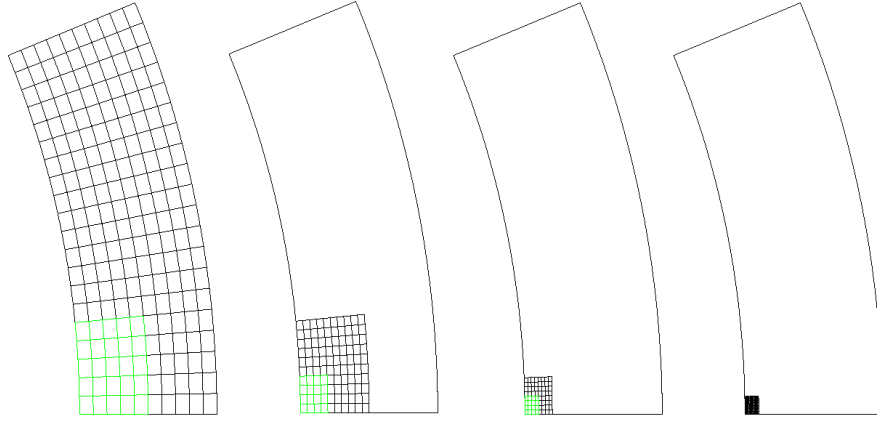


FIGURE III.8 – Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

l'erreur avec un  $\alpha$  optimal sont reportés dans le tableau III.2 pour les deux choix de second membre durant l'étape de prolongement.

$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$ selon le second membre durant l'étape de prolongement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i$	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$8.67 \cdot 10^{-2}$	'i' : $8.40 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $3.91 \cdot 10^{-2}$	'i' : $8.29 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.47 \cdot 10^{-2}$	'i' : $8.24 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $2.40 \cdot 10^{-3}$
$h_i/2$	$8.61 \cdot 10^{-2}$	$3.94 \cdot 10^{-2}$	'i' : $1.59 \cdot 10^{-2}$ 'c' : $1.53 \cdot 10^{-2}$	'i' : $4.15 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.82 \cdot 10^{-3}$	
$h_i/4$	$3.93 \cdot 10^{-2}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	'i' : $3.03 \cdot 10^{-3}$ 'c' : $2.70 \cdot 10^{-3}$		
$h_i/8$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$2.68 \cdot 10^{-3}$			
$h_i/16$	$2.70 \cdot 10^{-3}$				

TABLE III.2 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha$  optimal - Comparaison entre le second membre “initial” (‘i’ :  $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et “corrigé” (‘c’ :  $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ )

Étant donné que le critère  $\alpha$  optimal a été obtenu pour des simulations avec second membre “corrigé”, on retrouve dans ce cas la convergence optimale de la méthode en  $O(d_{h_{fin}})$ . Cela confirme que l'erreur de discrétisation de la géométrie est négligeable par rapport à l'erreur de modélisation (voir section II.2.2).

Tout comme pour le cas 2D(r,z), une stagnation apparaît précocement lorsque le second membre n'est pas modifié durant l'étape de prolongement, en particulier pour le maillage initial le plus grossier ( $h_0 = h_i$ ). Ainsi, la correction de la solution composite par la méthode LDC est fortement détériorée. Par exemple, l'erreur obtenue pour une simulation avec  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 4$  et le second membre “initial” conduit à une erreur 40 fois plus grande que pour le second membre “corrigé”.

L'écart entre les deux choix concernant le second membre durant l'étape de prolongement a donc augmenté par rapport à l'étude *a priori*. Si on observe les maillages obtenus (cf. figure III.8), cette évolution semble corroborer notre hypothèse précédente, puisque la modification de la zone de raffinement a conduit cette fois à utiliser des maillages ayant proportionnellement plus de CL de Dirichlet interpolées.

### III.1.4 Conclusion : obtention d'un critère générique

En conclusion, pour les deux cas tests, le processus de raffinement a été automatisé avec succès à l'aide de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ. Les performances de la combinaison de LDC et ZZ en termes de temps CPU et d'espace mémoire restent comparables à celles obtenues à la section II.4, voir [Barbié *et al.*, 2014] par exemple. Comme pour tout estimateur d'erreur *a posteriori*, un critère jouant le rôle de seuil doit être fixé. Nous avons vu que ce critère tenait un rôle très important dans l'obtention de la convergence optimale. Cette étude a montré que pour chaque cas test le critère optimal dépendait uniquement du niveau d'erreur attendu. Cependant, la valeur du critère varie en fonction du cas test étudié. Pour l'instant, nous n'avons pas trouvé de corrélation simple entre le critère optimal et l'erreur attendue indépendamment de la singularité considérée. Cependant, pour les deux études, un critère ZZ de 0.25 semble offrir un bon compromis entre la précision obtenue et le nombre d'éléments raffinés. Par exemple, la convergence en maillage de la méthode en  $O(d_{h_{fin}})$  pour la norme  $L^2$  relative composite est obtenue pour le cas 2D( $r, \theta$ ) comme l'illustre la figure III.9

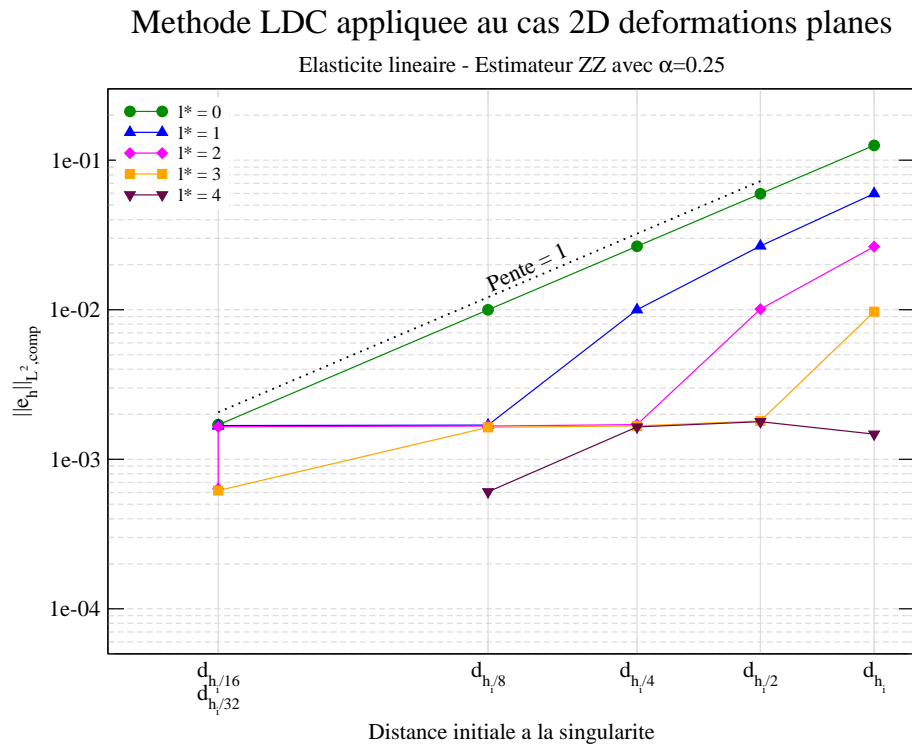


FIGURE III.9 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

Dans la suite, l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ sera utilisé afin de générer automatiquement les

sous-grilles. Le critère de raffinement  $\alpha$  pourra prendre les valeurs optimales ou la valeur constante de 0.25. Par ailleurs, les conclusions du chapitre précédent concernant le choix du second membre durant l'étape de prolongement ont été confirmés ici. Ainsi, les études suivantes utiliseront durant l'étape de prolongement un second membre "corrigé" ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) offrant la meilleure précision sur la solution composite.

## III.2 Influence du rapport de raffinement

La méthode LDC appliquée à une discrétisation par EF est réalisée classiquement avec un rapport de raffinement de 2 (voir par exemple [Hackbusch, 1984, Belliard et Grandotto, 2003, Anthonissen *et al.*, 2005, Ramière *et al.*, 2007a]). Les études couplant la méthode LDC à une discrétisation par la méthode des Volumes Finis utilisent un rapport de raffinement de 3 (voir par exemple [Kramer *et al.*, 2009]), pour des raisons de simplification des projections. Mais, à notre connaissance, très peu d'études ([Khadra *et al.*, 1996, Barbié *et al.*, 2014]) comparent plusieurs rapports de raffinement sur le même cas test. Comme l'algorithme LDC n'impose pas de limitation théorique concernant le choix du rapport de raffinement, nous avons décidé de comparer les performances de la méthode LDC avec un rapport de raffinement constant égal à 2 ou 4. Le cas test d'étude est le cas 2D( $r, \theta$ ). Le cas test 2D( $r, z$ ) n'est pas présenté ici car il conduit aux mêmes conclusions.

### III.2.1 Convergence en maillage pour $r = 4$

Nous utilisons dans cette section un rapport de raffinement constant de 4. Nous avons tout d'abord réalisé une nouvelle étude de convergence en fonction du critère  $\alpha$  utilisé dans le processus de raffinement, afin de voir si les zones d'intérêt sont différentes du cas où le rapport de raffinement était fixé à 2. La convergence de la norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction du critère  $\alpha$  est tracée sur la figure III.10, pour un rapport de raffinement fixé à 4.

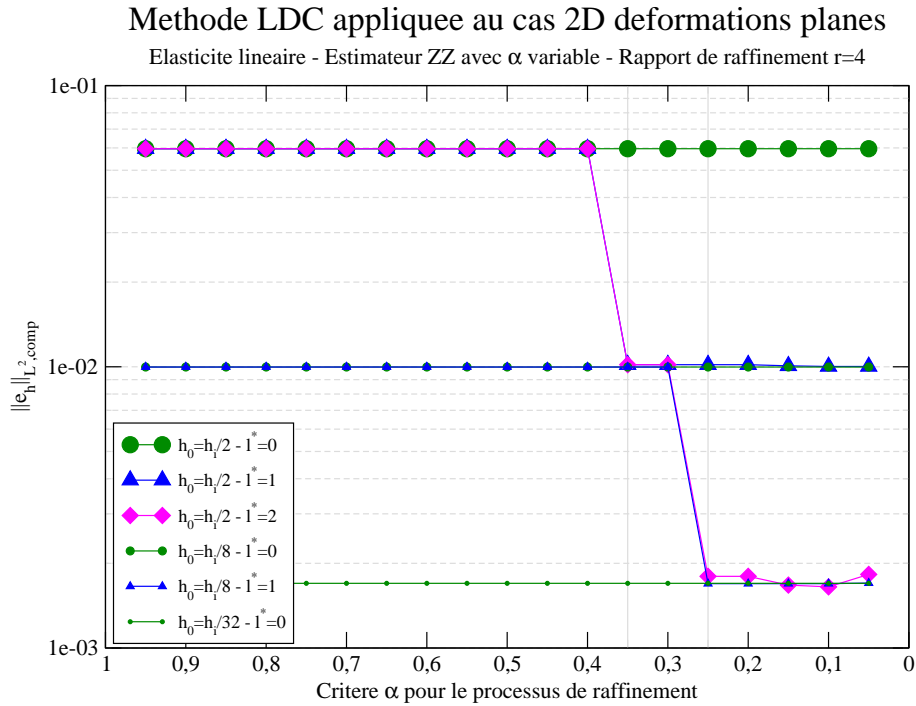


FIGURE III.10 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction du critère  $\alpha$  utilisé dans le processus de raffinement - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Rapport de raffinement  $r=4$

Nous pouvons alors comparer les résultats obtenus avec un rapport de raffinement fixé à 4 (figure III.10) ou à 2 (figure III.7 p.77). Comme attendu par la théorie, nous obtenons asymptotiquement

les mêmes niveaux d'erreurs pour des simulations faites avec deux raffinements successifs de rapport 2 que pour des simulations faites avec un raffinement de rapport 4, même pour de faibles niveaux d'erreur.

De plus, comme précédemment, un critère optimal  $\alpha$  peut être obtenu en fonction du niveau d'erreur attendu. Ce critère semble un peu plus large que dans le cas d'un rapport 2, pour les niveaux d'erreurs assez grossiers (de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-2}$ ) mais tend à être le même pour des niveaux d'erreurs fins (de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-3}$ ). Cela signifie que des zones légèrement moins larges seront nécessaires pour obtenir les erreurs les plus fortes si un plus grand rapport de raffinement est utilisé, mais ces zones seront raffinées plus finement que dans le cas d'un rapport de raffinement de 2.

Nous avons ensuite étudié la convergence en maillage de la méthode LDC avec un rapport de raffinement de 4 et un critère de raffinement  $\alpha$  optimal pour le rapport 4. Les résultats pour la norme  $L^2$  relative composite de l'erreur sont disponibles sur la figure III.11.

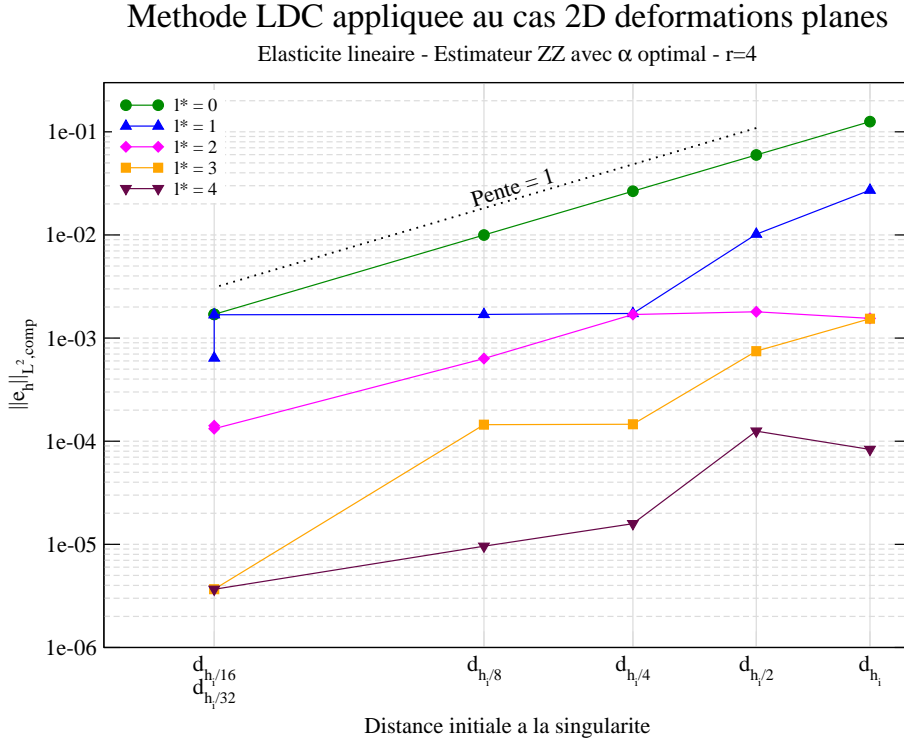


FIGURE III.11 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha$  optimal - Rapport de raffinement  $r=4$

L'erreur obtenue ne semble ici encore dépendre que de la taille de maille fine. Ainsi, on retrouve la même erreur avec  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 4$  qu'avec  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 3$  ou  $h_0 = h_i/16$  et  $l^* = 2$ , tous ces maillages ayant pour taille de maille la plus fine  $h_{min} = h_i/256$  (soit environ  $0.85 \mu m$ ). L'ordre de convergence optimal en  $O(d_{h_{fin}})$  est donc conservé, quel que soit le rapport de raffinement utilisé. Au vu des cas tests effectués ici, l'outil proposé couplant LDC et estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ semble donc permettre différents types de stratégies de raffinement multi-niveaux (rapport de raffinement variable, nombre de niveaux, ...). De plus, nous pouvons observer qu'avec un rapport de raffinement plus grand, nous atteignons rapidement des tailles de maille très faibles inférieures



au micron pour lesquelles la solution de référence n'est plus assez précise (par exemple  $h_0 = h_i/16 = 13.6 \mu\text{m}$  et 3 sous-niveaux de raffinement, soit  $h_{\min} = 0.2 \mu\text{m}$ ).

### III.2.2 Performances de la méthode LDC en fonction du rapport de raffinement

L'utilisation d'un rapport de raffinement de 4 permet donc d'obtenir aisément des niveaux d'erreur et des tailles de mailles plus faibles qu'un rapport de raffinement de 2. Cependant, pour une erreur voulue, nous voulons savoir quel rapport de raffinement est le plus intéressant en termes de moyens de calcul nécessaires. Pour cela, nous avons dans un premier temps étudié l'erreur obtenue en fonction du temps CPU, pour les deux rapports ( $r = 2$  et  $r = 4$ ) avec un critère  $\alpha$  optimal. La comparaison est faite sur la figure III.12 pour la norme  $L^\infty$  relative composite.

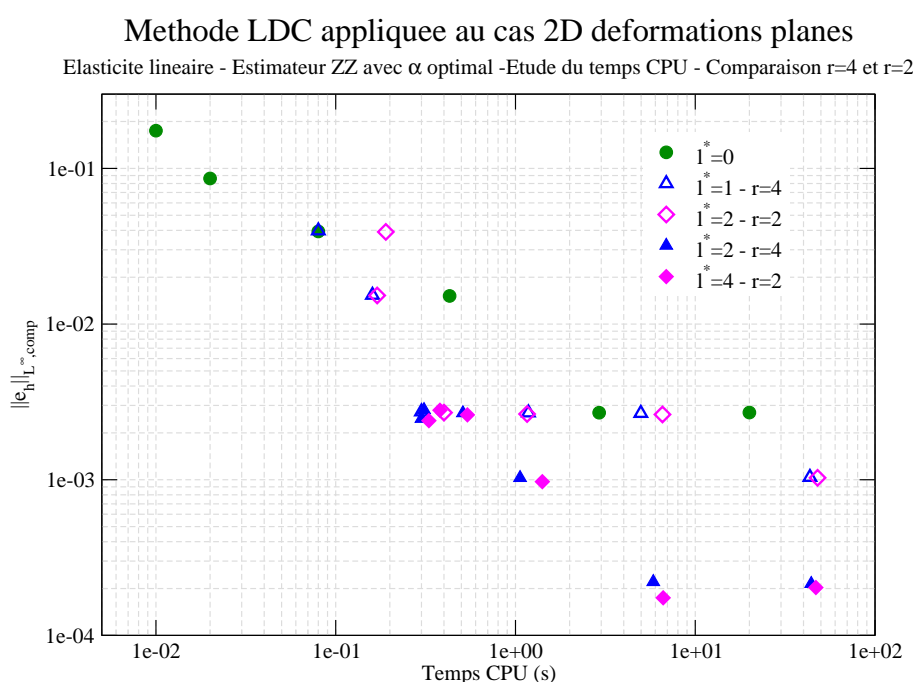


FIGURE III.12 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du temps CPU - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha$  optimal - Comparaison des rapports de raffinement  $r = 2$  et  $r = 4$

Nous pouvons voir que les deux rapports nécessitent des temps CPU proches pour obtenir les mêmes niveaux d'erreur. Les temps du rapport de raffinement  $r = 4$  semblent légèrement inférieurs.

Afin de conforter ce résultat, nous avons regardé plus en détails le comportement des deux rapports de raffinement en termes d'erreur, de temps CPU et de nombre de nœuds. Les valeurs obtenues sont exposées dans le tableau III.3.

La première conclusion à tirer de ce tableau est que l'utilisation d'un rapport de raffinement plus élevé réduit le nombre de grilles, mais peut conduire à raffiner finement des zones plus étendues que si un rapport de raffinement  $r = 2$  était appliqué et donc à augmenter le nombre de nœuds nécessaires au calcul. Dans notre cas, comme le rapport de surface entre  $\Omega_l$  et  $\Omega_{l+1}$  est quasi constant, il y a environ deux fois plus de nœuds sur l'ensemble des sous-niveaux générés avec le rapport 4 qu'avec le rapport 2, pour la même erreur. Le rapport de raffinement de 4 n'est donc pas

Comparaison entre les rapports de raffinement 2 et 4 - $h_0 = h_i/2$				
$l^* - r$	2 - 2	1 - 4	4 - 2	2 - 4
$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$1.53 \cdot 10^{-2}$	$2.80 \cdot 10^{-3}$	$2.81 \cdot 10^{-3}$
Nœuds ajoutés (hors niveau 0)	242	441	484	882
Temps CPU	$1.7 \cdot 10^{-1}$ s	$1.6 \cdot 10^{-1}$ s	$3.8 \cdot 10^{-1}$ s	$3.1 \cdot 10^{-1}$ s

Comparaison entre les rapports de raffinement 2 et 4 - $h_0 = h_i/16$				
$l^* - r$	2 - 2	1 - 4	4 - 2	2 - 4
$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$2.67 \cdot 10^{-3}$	$1.74 \cdot 10^{-4}$	$2.21 \cdot 10^{-4}$
Nœuds ajoutés (hors niveau 0)	242	441	638	1134
Temps CPU	6.6 s	5.0 s	6.6 s	5.8 s

TABLE III.3 – Comparaison entre les rapports de raffinement 2 et 4 - Cas 2D(r,  $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha$  optimal

attractif en terme de nombre de nœuds pour le cas test étudié. Néanmoins, le rapport 4 conduit à des temps CPU plus faibles (jusqu'à 24% de moins) que le rapport 2. Ce gain en temps peut s'expliquer par le nombre plus faible de sous-niveaux nécessaires au calcul, et donc de problèmes à résoudre (même s'ils possèdent plus de ddl). Cependant, comme les temps CPU considérés sont assez petits, cette conclusion reste à vérifier sur un cas test plus conséquent.

Pour conclure, l'utilisation d'un rapport de raffinement différent de 2 ne pose pas de problème à la méthode LDC. L'ordre de convergence optimal de la méthode en  $O(d_{h_{fin}})$  semble indépendant du rapport de raffinement choisi. Si l'utilisation d'un rapport de raffinement de 4 conduit toujours à utiliser plus de nœuds que le rapport de raffinement de 2, la diminution de nombre de niveaux nécessaires pour atteindre une taille de maille donnée permet d'économiser jusqu'à 25% du temps de calcul pour des mêmes niveaux d'erreur.

Cependant, pour notre problématique 3D, l'utilisation d'un rapport de raffinement de 4 ne semble pas intéressant à cause du nombre important de ddl qu'il induit, même si les temps de calcul peuvent devenir intéressants. Les niveaux de raffinement se localisant de plus en plus, les mêmes conclusions s'appliquent à l'utilisation d'un rapport de raffinement variable (différent selon le niveau considéré). Dans la suite, nous utiliserons donc toujours un rapport de raffinement de 2.

### III.3 Apport dans le cas 3D multi-singularités

Conformément à la section I.2.3, ce cas test réunit les deux phénomènes 2D (mise en diabololo et fissuration de la pastille) dans une géométrie tridimensionnelle. La solution de référence la plus précise que nous avons obtenue pour un comportement linéaire élastique a été calculée sur un maillage structuré non uniforme dont la taille de maille varie entre 2 et 50  $\mu m$  ( $\simeq 2$  millions de ddl).

#### III.3.1 Étude de convergence

Comme indiqué à la fin de la section précédente, nous utilisons pour toute cette section un rapport de raffinement  $r = 2$ .

Par ailleurs, un choix *a priori* du critère de raffinement optimal  $\alpha$  n'est pas aisé. En effet, nous avons vu dans la section III.1 qu'il dépend du cas test étudié. De plus, l'utilisation de la valeur minimale des deux critères obtenus dans les études 2D ne permet pas d'obtenir les résultats escomptés : cette valeur est trop grande pour les erreurs les plus fortes et trop petite pour les erreurs les plus fines. Une étude de convergence selon le critère  $\alpha$  devrait donc être de nouveau réalisée. Comme cette étude de sensibilité est très coûteuse, particulièrement dans un contexte 3D, et compte-tenu des conclusions de la section III.1, nous avons décidé de réaliser l'étude de convergence en maillage directement avec un critère de raffinement fixé à  $\alpha = 0.25$ , qui semble être un bon compromis pour les deux études 2D.

La norme  $L^2$  relative composite de l'erreur entre la solution de référence et la solution LDC est tracée sur la figure III.13. Pour ce cas test, la taille de maille initiale est  $h_i = 629 \mu m$ .

Dans ce cas,  $d_h$  représente la distance entre la position réelle de l'intersection des deux singularités (point triple) et son approximation sur le maillage de pas  $h$ .

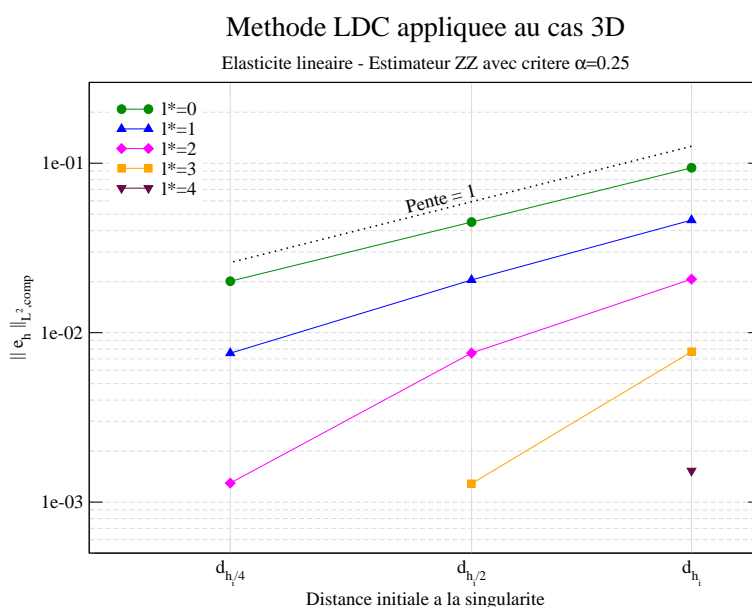


FIGURE III.13 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

La convergence au premier ordre attendue (cf. section II.2.3) est atteinte pour les solutions uniformes mono-grilles. Cependant, des solutions mono-grilles uniformes plus précises (erreur inférieure

à  $2 \cdot 10^{-2}$  ou taille de maille inférieure à  $150 \mu\text{m}$ ) ne peuvent pas être obtenues sur une machine de travail personnelle du fait du nombre trop important de ddl impliqués.

La figure III.13 montre que l'amélioration efficace de la solution grâce à la stratégie de raffinement local multi-grille reste vraie dans un contexte tridimensionnel puisque des solutions plus précises peuvent être aisément calculées. Par exemple, l'erreur est divisée d'un facteur 50 en utilisant 4 niveaux de raffinement à partir du maillage de taille  $h_i$ . Par ailleurs, la méthode LDC appliquée à l'intersection 3D de deux singularités continue à converger en  $O(d_{h_{fin}})$ , les erreurs obtenues étant quasi optimales. Ces résultats sont vraiment satisfaisants, en particulier avec un choix de  $\alpha$  indépendant de l'utilisateur et de l'erreur voulue. Cette étude valide donc le choix *a priori* de  $\alpha = 0.25$  pour nos cas tests.

Un exemple de maillages raffinés obtenus avec  $\alpha = 0.25$  se trouve figure III.14. L'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ détecte automatiquement et correctement les singularités croisées. Les maillages les plus fins sont très localisés autour des deux singularités. Ces maillages quasi-structurés ont été obtenus de manière similaire aux cas 2D. Pour chaque coordonnée  $z$ , l'algorithme 2D est appliqué dans le plan  $(r, \theta)$ . Puis les couches obtenues sont rassemblées en plusieurs zones, selon leur surface. Par ailleurs, l'erreur fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ au niveau des singularités artificielles créées par cette procédure à l'intersection des différentes zones n'est pas prise en compte dans la détection suivante. Cette détection reste donc automatique, mais repose sur la connaissance du plan des fissures. Un algorithme plus générique, de type détection de forme par exemple, doit être combiné à la méthode LDC si rien n'est connu *a priori* concernant la zone d'intérêt.

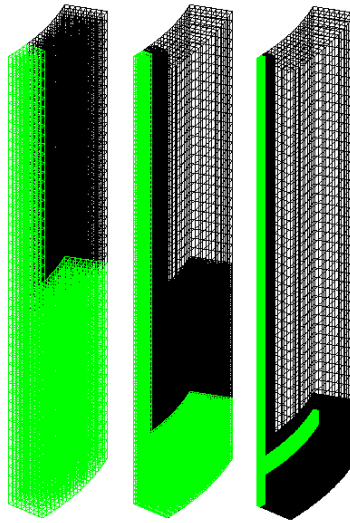


FIGURE III.14 – Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 3D - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

Compte-tenu de la forme de la zone de raffinement, il pourrait être intéressant d'utiliser une méthode de décomposition de domaine [Schwarz, 1870, Le Tallec, 1994, Parret-Fréaud *et al.*, 2010] afin de diviser chaque sous-niveau en deux zones rectangulaires se focalisant chacune sur l'une des deux singularités. Comme précédemment, la norme maximale relative composite de l'erreur a aussi été étudiée, et les résultats sont disponibles dans le tableau III.4.

Ce tableau permet d'apprécier la précision de la solution obtenue avec la méthode LDC combinée

Performances de la méthode LDC en 3D avec $\alpha = 0.25$						
$h_0 \backslash l^*$		0	1	2	3	4
$h_i$	$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$	$5.75 \cdot 10^{-2}$	$2.61 \cdot 10^{-2}$	$9.99 \cdot 10^{-3}$	$2.12 \cdot 10^{-3}$
	Temps CPU	$2.2 \cdot 10^{-1}$ s	6.3 s	$1.4 \cdot 10^2$ s	$8.8 \cdot 10^2$ s	$9.4 \cdot 10^2$ s
	Nombre de nœuds	1375	8260	42813	127766	183811
$h_i/2$	$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	$5.64 \cdot 10^{-2}$	$2.60 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.91 \cdot 10^{-3}$	
	Temps CPU	$1.1 \cdot 10^1$ s	$1.5 \cdot 10^2$ s	$8.8 \cdot 10^2$ s	$9.4 \cdot 10^2$ s	
	Nombre de nœuds	9261	44578	133183	188544	
$h_i/4$	$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	$2.57 \cdot 10^{-2}$	$9.93 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-3}$		
	Temps CPU	$4.7 \cdot 10^2$ s	$1.2 \cdot 10^3$ s	$1.2 \cdot 10^3$ s		
	Nombre de nœuds	67609	156214	217279		

TABLE III.4 – Performances de la méthode LDC en fonction du maillage - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

à l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ. Les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  relatives composites de l'erreur ont ici encore le même comportement et la convergence en  $O(d_{h_{fin}})$  est atteinte.

Cette approche LDC combinée à l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ semble réellement prometteuse puisque, par exemple, pour atteindre une erreur d'environ  $2.5 \cdot 10^{-2}$ , l'utilisation d'un maillage  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 1$  permet d'économiser 68% du temps de calcul et 34% des nœuds par rapport à un maillage uniforme de taille  $h_0 = h_i/4$ . Par contre ici l'intérêt d'utiliser de nombreux sous-niveaux est moins marqué puisque le maillage  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 2$  ne permet pas d'économiser du temps de calcul ni de réduire le nombre total de nœuds par rapport au maillage  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 1$ . Cependant chaque niveau reste plus léger.

### III.3.2 Intérêt des maillages réguliers

Dans un contexte industriel et compte-tenu de l'élancement de la structure, il semble attrayant d'utiliser des maillages étirés dans la direction axiale. Ainsi, le maillage initial de la figure III.15 est deux fois plus étiré dans la hauteur que dans l'étude précédente (voir figure III.14). Cependant, si nous fixons  $\alpha = 0.25$ , l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ ne va pas détecter entièrement les deux singularités pour générer le premier niveau (voir les maillages de la figure III.15). Ainsi, même si les niveaux suivants se focalisent autour des deux singularités, une partie de la singularité dans le plan  $(r, \theta)$  ne sera pas raffinée.

Les résultats de la convergence en maillage obtenus avec ces grilles sont alors loin de ceux attendus, comme nous pouvons le voir sur la figure III.16 qui représente la norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité.

La convergence en  $O(d_{h_{fin}})$  n'est plus atteinte, dès le premier sous-niveau, en particulier pour les maillages grossiers. De plus, l'utilisation de sous-grilles additionnelles ( $l^* > 1$ ) ne permet plus de diminuer l'erreur obtenue. Dans ce cas, l'étirement du maillage autour de la singularité principale empêche l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ de détecter correctement la singularité de moindre influence avec le même critère de raffinement. En effet, il faut rappeler que cet estimateur est basé sur un lissage des contraintes. Comme attendu par la théorie, l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ détecte les problèmes de continuité de la solution en contraintes et a donc tendance à se focaliser sur la dégénérescence en maillage notamment autour de la zone d'influence de la singularité principale.

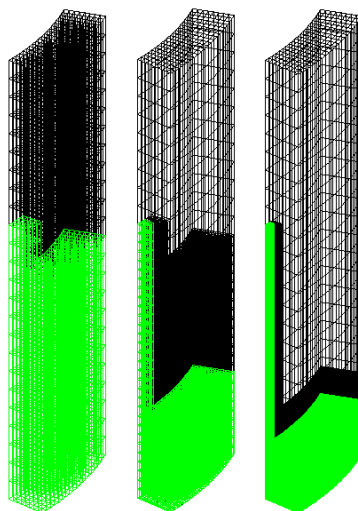


FIGURE III.15 – Exemple de maillages imbriqués obtenus avec des mailles étirées selon l’axe vertical  
 - Estimateur d’erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 3D - Élasticité linéaire

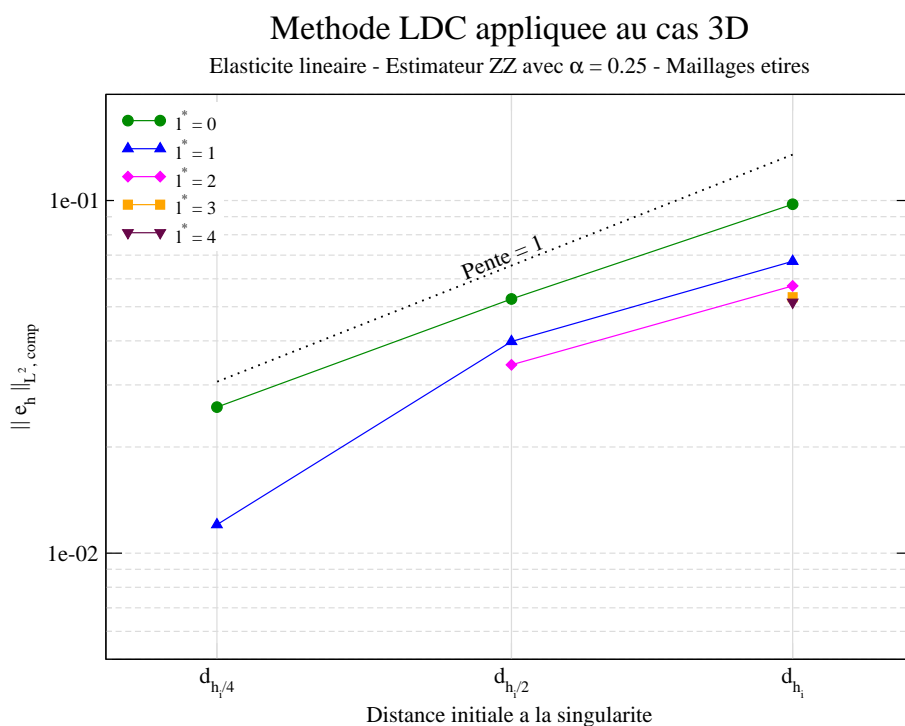


FIGURE III.16 – Norme  $L^2$  relative composite de l’erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d’erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  et des mailles étirées selon l’axe vertical

Une étude de sensibilité a montré que pour ce type de maillages initiaux le critère de raffinement  $\alpha$  devait être fixé à 0.15 afin de sélectionner précisément les deux singularités. L'étirement du maillage induit alors une large zone à raffiner autour de la singularité de mise en diabololo (voir la figure III.17 par rapport à la figure III.14), surtout à partir du deuxième sous-niveau.

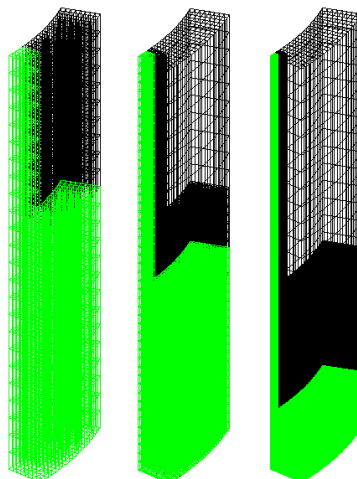


FIGURE III.17 – Exemple de maillages imbriqués obtenus avec des mailles étirées selon l'axe vertical - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.15$  (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 3D - Élasticité linéaire

La norme  $L^2$  relative composite de l'erreur entre la solution de référence et la solution LDC est tracée sur la figure III.18.

À présent, la convergence attendue en  $O(d_{h_{fin}})$  est retrouvée. Cependant, des erreurs plus petites que  $10^{-2}$  comme celles obtenues sur la figure III.13 ne peuvent plus être atteintes ici. En effet, le nombre de ddl nécessaires rend impossible l'inversion du système linéaire avec les mêmes moyens informatiques que précédemment.

En plus des performances bien connues des solveurs linéaires sur les grilles structurées régulières, cette étude nous permet de conclure que l'aptitude de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ à détecter plusieurs singularités de taille caractéristique différente est aussi très dépendante de la régularité du maillage.

### III.3.3 Conclusion

Pour conclure, les résultats obtenus pour la simulation avec la méthode LDC du problème de point triple sont très satisfaisants. En effet, le couplage de cette méthode avec l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ reste efficace sur le cas 3D multi-singularités, puisque des maillages localisés autour des deux singularités sont obtenus de façon automatique et permettent d'atteindre l'ordre de convergence optimal de la méthode en  $O(d_{h_{fin}})$ .

Cette étude a également mis en avant l'intérêt (en termes de zone de raffinement et de nombre de ddl) d'utiliser un maillage de départ régulier dans le cadre d'une procédure de raffinement local de maillage. En effet, plus le maillage de départ est régulier, plus un seuil de détection élevé permet à l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ de détecter les zones de singularités. Des économies en nombre de ddl sont aussi réalisées.

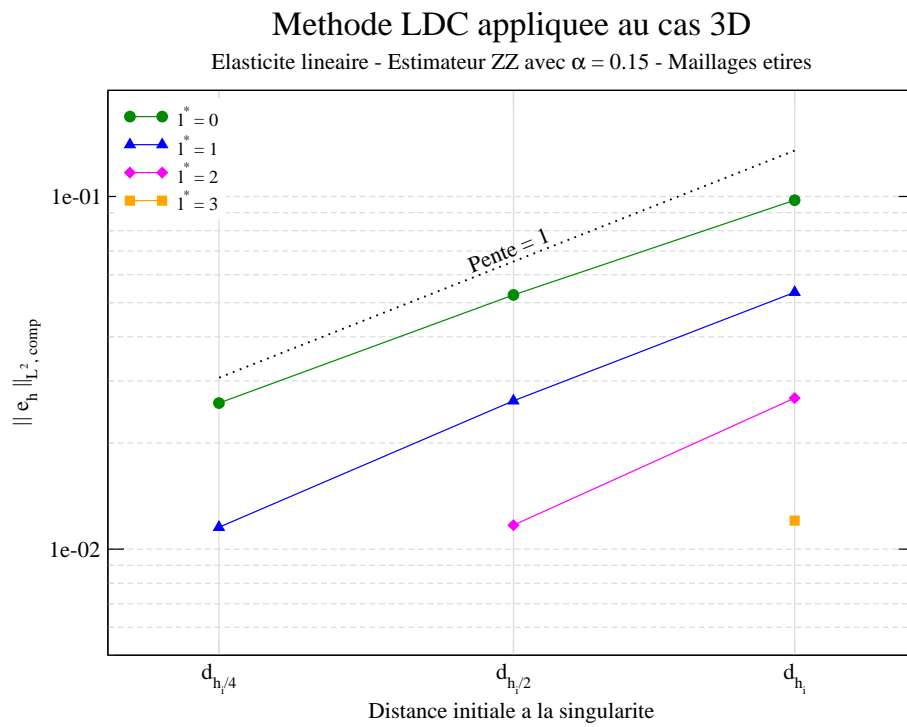


FIGURE III.18 – Norme  $L^2$  relative composite de l’erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d’erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.15$  et des mailles étirées selon l’axe vertical



## III.4 Comparaison avec d'autres méthodes de raffinement local

Dans ce chapitre, nous allons comparer les performances de la méthode LDC avec d'autres méthodes de raffinement local (FMG ("Full Multi-Grid") local, raffinement h-adaptatif global conforme et local non conforme). Ce type de comparaison est peu fait dans la littérature, mais s'avère pourtant nécessaire pour attester de l'intérêt d'une méthode (pour un type de problème particulier). Comme nous avons vu précédemment que les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  ont un comportement équivalent, et étant donné que la norme  $L^\infty$  majore la norme  $L^2$ , dans la suite de l'étude nous étudierons seulement la norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur.

### III.4.1 Cycles FMG locaux

Le but de cette première étude est de montrer les différences entre la méthode LDC et le FMG local. Dans le cas du multi-grille standard, l'utilisation de cycles FMG afin de réaliser une résolution progressive du problème est intéressante en terme de coût de calcul. En effet, si on note  $N$  le nombre d'inconnues du problème par direction de l'espace et  $d$  la dimension de l'espace, le coût d'une résolution multi-grille standard est de l'ordre de  $N^d \log N$  alors que le coût d'une résolution FMG est seulement de l'ordre de  $N^d$  [Désidéri, 1998].

Se pose alors la question de l'intérêt de l'application de cette stratégie à du raffinement de maillage multi-grille local. La méthode FMG a en effet déjà comme point commun avec les méthodes multi-grilles locales de résoudre le problème à partir du niveau le plus grossier. Cependant, comme la méthode LDC converge très vite (en 3 ou 4  $\wedge$ -cycles), l'accélération de convergence due à l'utilisation de cycles FMG semble être limitée. De plus, la résolution progressive, qui permet de faciliter la résolution des sous-niveaux fins suivants semble également peu intéressante dans notre cas, puisque un solveur direct peut être utilisé sur chaque sous-niveau, du fait du faible nombre de ddl impliqués. Pour finir, la méthode FMG local [Biotteau *et al.*, 2012] consistant à appliquer successivement la méthode LDC en ajoutant des niveaux après convergence du cycle précédent, le processus de détection de la zone à raffiner s'applique alors sur les solutions fines à convergence et non pas sur les solutions fines de la première étape de prolongement comme dans un cycle LDC. Nous allons alors quantifier l'influence de cette différence en comparant les zones détectées par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ sur le niveau fin avant et après un cycle bi-grille (représentant le début d'un cycle FMG, cf. figure A.3 en annexe A).

La méthode FMG présente par ailleurs un intérêt majeur lorsque l'erreur estimée est représentative de l'erreur de discrétisation. En effet, la génération progressive des niveaux permet d'arrêter précisément le processus de raffinement lorsque l'erreur voulue est atteinte. La solution obtenue avant chaque ajout d'un sous-niveau bénéficie déjà des corrections des niveaux plus grossiers contrairement à la méthode LDC où tous les niveaux sont générés dès la première étape de prolongement. Cependant, comme vu en section III.1.1, l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ choisi ne permet pas de bénéficier de cette fonctionnalité car dans le cas d'une singularité approchée, il sous-estime l'erreur de discrétisation.

#### III.4.1.a Cas 2D(r,z)

Nous nous intéressons tout d'abord au cas 2D(r,z). Comme, quelle que soit la méthode MGL choisie, le premier niveau est généré à la première étape de prolongement, la modification éventuelle apportée par un cycle FMG ne peut agir qu'à partir du niveau 2. Nous avons alors tracé le champ d'erreur *a posteriori* estimé par ZZ sur le niveau 1 (voir la figure III.19), durant la première étape de prolongement (figure III.19(a)) et après convergence (figure III.19(b)) du cycle bi-grille.

L'élément possédant l'erreur maximale est le même avant et après le cycle bi-grille (position du

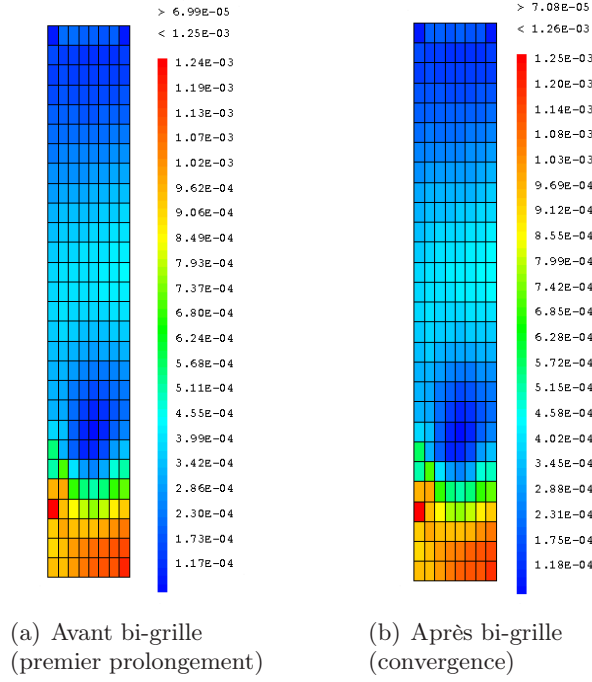


FIGURE III.19 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avant et après le cycle bi-grille - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i$  et  $l = 1$

saut de pression). La différence entre les champs d'erreur estimés par ZZ avant et après le cycle bi-grille semble minime. Les niveaux d'erreur obtenus sont équivalents. En effet, le premier niveau n'a pas été corrigé par un niveau plus fin, seules les CL ont été mises à jour. L'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ ne voit pas le fait que la solution ait changé mais seulement l'allure du champ de contraintes qui lui est resté inchangé puisque aucun terme de correction n'a été ajouté. Nous avons appliqué la procédure de détection avec  $\alpha = 0.25$  afin de générer le niveau 2 dans les deux configurations. Les zones détectées (en rouge) et raffinées (en vert) sont tracées sur la figure III.20.

La zone à raffiner serait exactement la même après le cycle bi-grille. Ainsi, l'utilisation de cycle FMG ne permettrait pas une réduction attractive de la taille de la zone à raffiner dans ce cas. Néanmoins, pour être sûr que le critère  $\alpha$  utilisé n'est pas trop contraignant pour la méthode FMG, une nouvelle étude de sensibilité serait nécessaire. Cette étude est cependant hors du propos de cette thèse. De plus, il semble peu probable que le critère  $\alpha$  optimal obtenu pour les cycles FMG soit très différent de celui obtenu pour la méthode LDC, car nous avons constaté dans les études précédentes que ce critère semblait dépendre uniquement du niveau d'erreur voulu.

#### III.4.1.b Cas 2D(r, $\theta$ )

Nous avons ensuite réalisé la même étude sur le cas 2D(r, $\theta$ ) afin de voir comment se comporte l'algorithme de type FMG en présence d'un champ d'erreur beaucoup plus localisé. Nous nous intéressons toujours à la génération du niveau 2. Le champ ZZ sur le niveau 1, avant et après le cycle bi-grille est représenté sur la figure III.21.

Les champs d'erreur obtenus sont là encore très proches. Cela confirme les conclusions précédentes. La seule modification des CL sur le niveau le plus fin ne modifie pas le comportement de

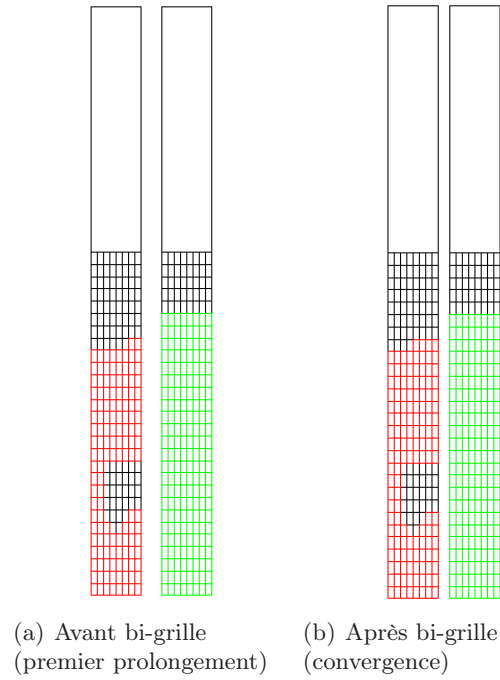


FIGURE III.20 – Zones détectées (en rouge) et raffinées (en vert) avant et après le cycle bi-grille - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i$  et  $l = 1$

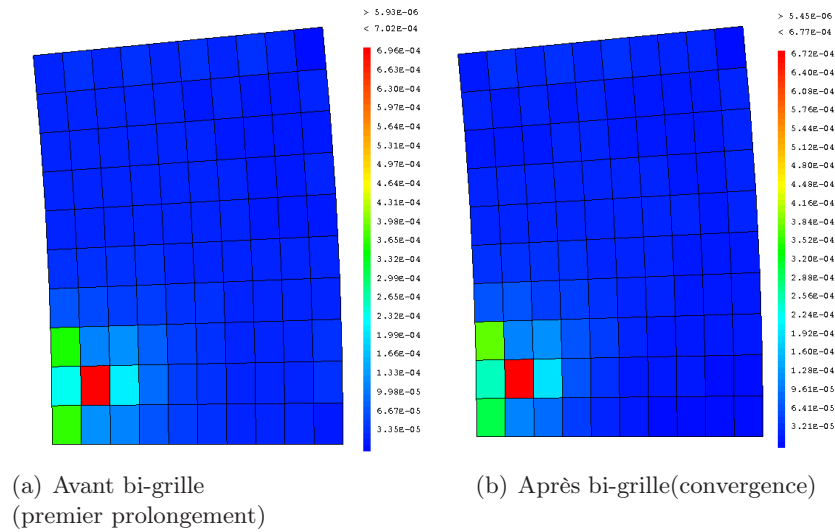


FIGURE III.21 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avant et après le cycle bi-grille - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l = 1$

l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ. Cette conclusion semble généralisable à tout niveau le plus fin considéré, quel que soit la précision de la solution sur ce niveau.

Les champs d'erreur étant similaires, les maillages générés pour le niveau suivant seront exactement le même avant et après cycle FMG.

### III.4.1.c Conclusion

Pour conclure, lorsque l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ est appliqué sur le niveau le plus fin, l'utilisation d'une pré-résolution de type FMG ne modifie pas la position et la taille des zones de raffinement détectées. En effet, la solution sur le niveau le plus fin n'a pas eu de terme de correction mais seulement des CL mises à jour, ce qui ne modifie pas l'allure de la solution mais seulement ses valeurs.

Pour bénéficier des avantages des cycles FMG, il faut que l'estimateur d'erreur *a posteriori* puisse tenir compte de l'amélioration de la solution, cf. [Biotteau *et al.*, 2012].

### III.4.2 Raffinement h-adaptatif global

Nous nous sommes intéressés ensuite aux performances de la méthode LDC vis-à-vis de l'approche de raffinement utilisée jusqu'à présent au CEA pour simuler l'IPG (voir par exemple la figure 15. p.1621 de [Michel *et al.*, 2008a]). Les maillages obtenus par cette approche sont similaires à ceux générés par un raffinement h-adaptatif global sur des éléments quadrangles.

Nous nous plaçons ici dans deux configurations différentes. Les maillages de type raffinement h-adaptatif global sont tout d'abord générés *a priori*, de façon similaire au cas exposé dans [Michel *et al.*, 2008a] mais en raffinant de façon homogène toutes les directions. Nous étudions ensuite le cas d'une génération automatique du maillage h-raffiné à l'aide de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ.

#### III.4.2.a Cas 2D( $r, \theta$ )

La première étude concerne le cas 2D( $r, \theta$ ). Compte-tenu des conclusions de la section II.4, la méthode LDC semble plus efficace quand un maillage initial grossier et de nombreux sous-niveaux sont utilisés. Pour cette comparaison, un maillage initial de taille de maille  $h_0 = h_i/2 = 109 \mu\text{m}$  est donc choisi et 1 à 9 sous-niveaux sont générés avec un rapport de raffinement de 2. Comme nous nous positionnons dans un contexte industriel, nous avons fixé *a priori* le critère de raffinement  $\alpha = 0.25$  pour tous les niveaux.

#### Comparaison à un maillage raffiné *a priori*

Nous avons dans un premier temps comparé la méthode LDC à la solution obtenue sur des maillages raffinés *a priori* semblables aux maillages utilisés actuellement pour la simulation de l'IPG et résultant de nombreuses études. Ces maillages ne sont pas réactualisés au cours du chargement. Les éléments situés près de la singularité sont fortement raffinés, ceux loin le sont très peu et les tailles de mailles augmentent de façon progressive entre ces deux extrêmes. Des éléments linéaires sont utilisés, car ce sont les seuls permettant de modéliser le contact de la façon correcte dans la procédure de gestion du contact de CAST3M. Les maillages sont construits de façon conforme. Des éléments quadrangulaires sont alors utilisés, car les éléments linéaires triangulaires sont trop rigides vis-à-vis du champ de contraintes.

Un exemple de maillage obtenu après raffinement h-adaptatif global *a priori* est disponible sur la figure III.22(a), à comparer à l'exemple de maillages imbriqués LDC.

Les contraintes techniques liées au maillage (maillage conforme, éléments quadrangulaires linéaires, modification progressive de la taille de maille) conduisent à des éléments très étirés dans certaines zones.

La norme  $L^\infty$  relative (composite pour la méthode LDC) de l'erreur en fonction du temps CPU est tracée sur la figure III.23 pour la méthode LDC et le raffinement h-adaptatif global. De plus, des indications concernant le nombre total de nœuds du problème traité sont données (nombre de

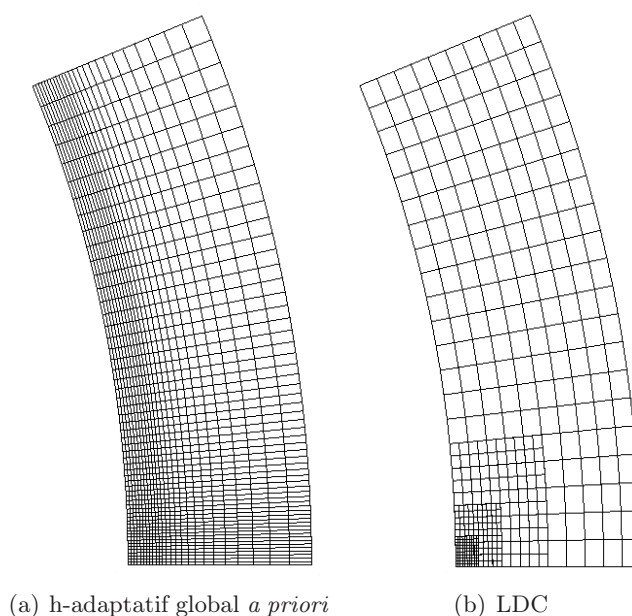


FIGURE III.22 – Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif global *a priori* et par la méthode LDC - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

nœuds de tous les niveaux pour LDC, nombre de nœuds du maillage raffiné pour le raffinement h-adaptatif global).

Le solveur LDC semble efficace, et devient rapidement intéressant par rapport au h-raffinement global *a priori*.

Pour des niveaux d'erreur supérieurs à  $3 \cdot 10^{-3}$ , soit des tailles de mailles supérieures à  $14 \mu\text{m}$ , le h-raffinement global est plus intéressant que la méthode LDC en terme de temps de calcul pour une même précision de la solution. Cependant, la méthode LDC permet de gagner déjà beaucoup de nœuds par rapport à une méthode de h-raffinement global. Ainsi, pour des tailles de maille de l'ordre de  $27 \mu\text{m}$  (et une erreur de l'ordre de  $1.5 \cdot 10^{-2}$ ), la méthode LDC nécessite 23% d'éléments en moins que le h-raffinement *a priori*. Pour une erreur de  $3 \cdot 10^{-3}$ , le gain en nombre de nœuds passe même à 43%. Dans ce cas, la perte de temps de calcul de la méthode LDC s'explique par la gestion des différents maillages, même très légers, qui est plus coûteuse qu'un calcul unique sur un maillage possédant peu de ddl (jusqu'à 3 fois plus de temps pour la méthode LDC que pour le h-raffinement *a priori*, pour une erreur de  $1.5 \cdot 10^{-2}$ ).

Pour des erreurs inférieures à  $3 \cdot 10^{-3}$ , le gain en nombre de nœuds de la méthode LDC devient de plus en plus important, ce qui permet à la méthode LDC de devenir compétitive en terme de temps de calcul. Ainsi, pour une erreur de  $1 \cdot 10^{-3}$  ( $h_{\min} = 1.7 \mu\text{m}$ ), la méthode LDC permet d'économiser 31% du temps de calcul par rapport au raffinement h-adaptatif global réalisé *a priori*. La différence se creuse encore pour les niveaux d'erreur les plus faibles, puisque pour une erreur de  $1.5 \cdot 10^{-4}$  (soit une taille de maille de l'ordre de  $0.2 \mu\text{m}$ , qui est inférieure à la taille visée pour simuler le comportement complet de la gaine), le calcul standard nécessite 6.3 fois plus de temps et 11.6 fois plus de nœuds que la méthode LDC.

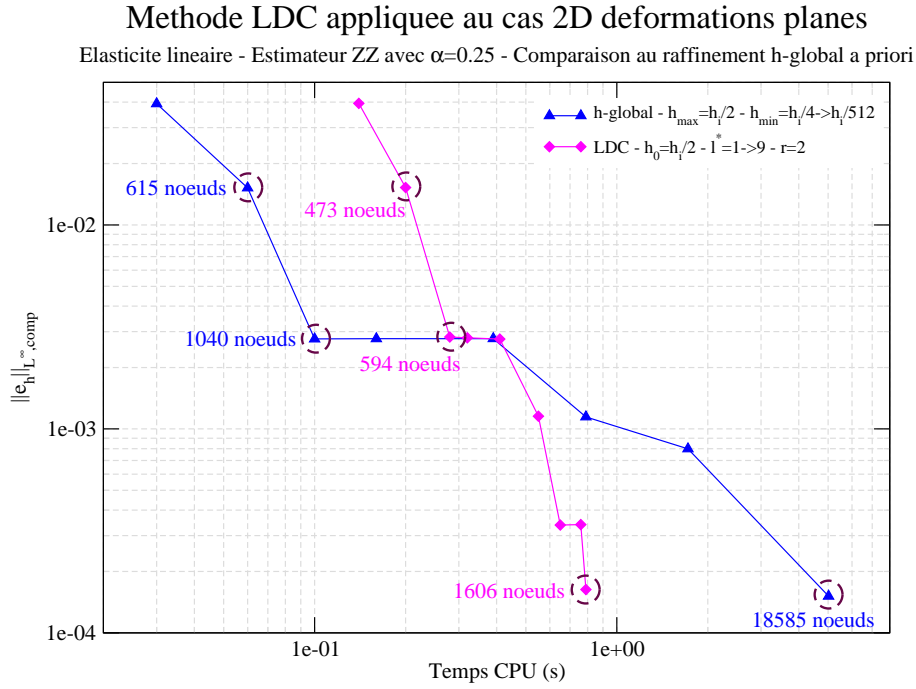


FIGURE III.23 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Comparaison du raffinement h-adaptatif global *a priori* et de LDC

### Comparaison à un maillage h-raffiné global obtenu à l'aide de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ

Nous avons également voulu apprécier l'effet de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ (voir la figure III.6 p.77) sur la procédure de h-raffinement global. Les maillages sont ainsi générés automatiquement sans connaissance préalable de l'utilisateur. Dans cette étude, les maillages raffinés sont générés en modifiant la densité des bords du maillage pour respecter les contraintes industrielles (maillage conforme, éléments  $Q_1$ ). Dans un premier temps, seule l'erreur estimée par ZZ sur le maillage grossier est utilisée pour générer le maillage raffiné. Un exemple de maillage obtenu après raffinement h-adaptatif global où la taille de maille est divisée par 8 localement est disponible sur la figure III.24(b), à comparer à l'exemple de maillages imbriqués LDC.

Le fait de générer directement le maillage raffiné à partir du niveau le plus grossier conduit à avoir un raffinement h-adaptatif qui n'est pas suffisamment localisé. Une génération successive est alors envisageable pour permettre d'obtenir des zones plus localisées, mais cette méthode peut s'avérer coûteuse car plusieurs calculs sur des maillages de plus en plus raffinés doivent être effectués. Un exemple de maillage obtenu après raffinement h-adaptatif global successif à l'aide de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ appliqué plusieurs fois (voir la figure III.25(a)) est disponible sur la figure III.25(b), à comparer à l'exemple de maillage généré directement sur la figure III.24(b) ou à l'exemple de maillage imbriqué LDC de la figure III.24(c). Nous comparons ici les deux approches de h-raffinement à la méthode LDC.

La norme  $L^\infty$  relative (composite pour la méthode LDC) de l'erreur en fonction du temps CPU est tracée sur la figure III.26 pour les deux méthodes de h-raffinement. Le temps CPU indiqué tient compte de la première résolution grossière pour le h-raffinement global direct. Pour le h-raffinement

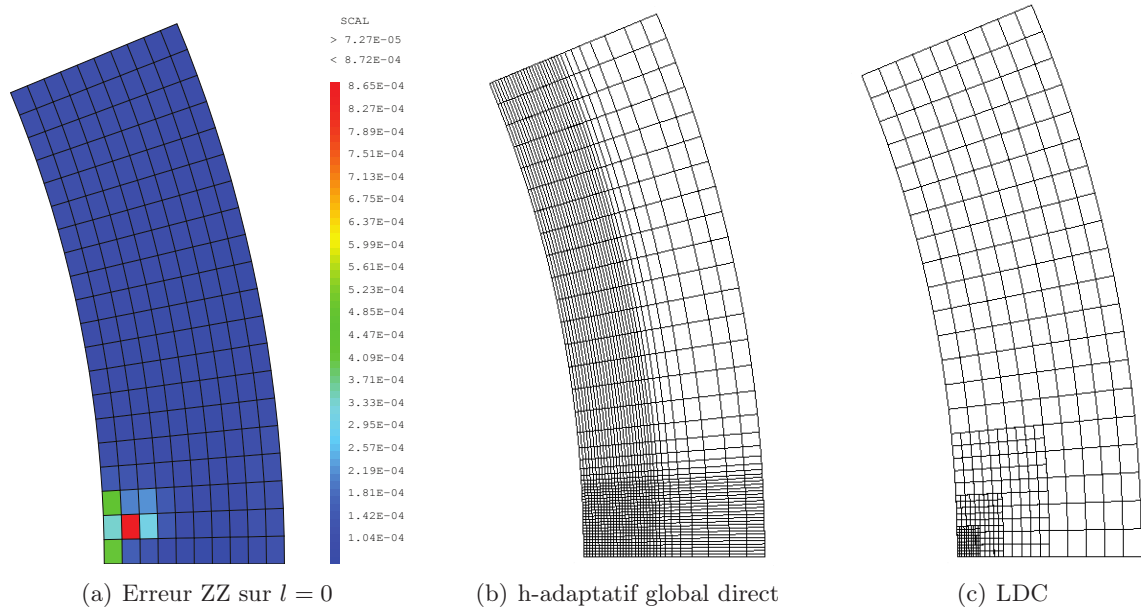


FIGURE III.24 – Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif global direct et par la méthode LDC - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

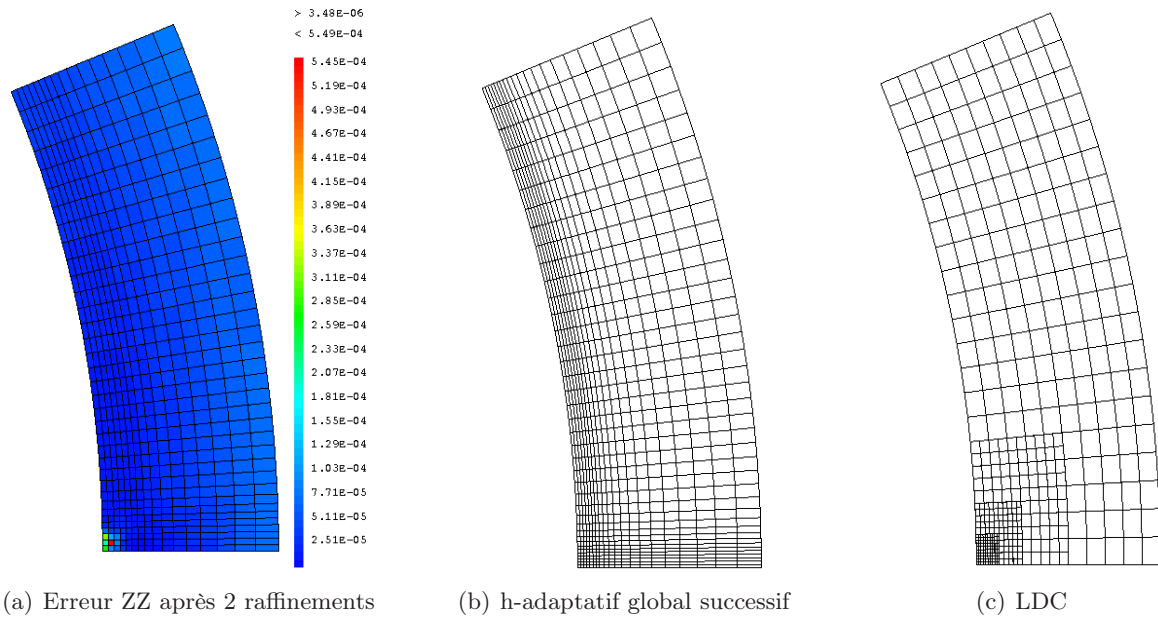


FIGURE III.25 – Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif global successif et par la méthode LDC - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$



global successif, deux valeurs sont tracées : l'une tenant compte du temps de résolution total (résolution des maillages intermédiaires permettant d'atteindre le maillage successif) et l'autre ne tenant compte que de la résolution finale sur le maillage successif (représentatif de l'hypothèse où le maillage est utilisé pour une série d'études).

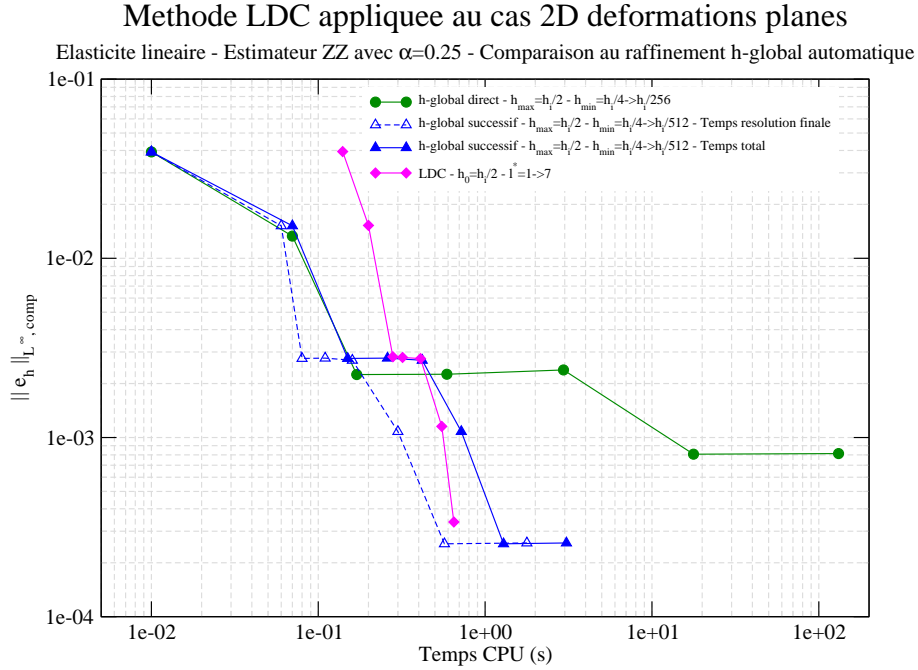


FIGURE III.26 – Norme  $L^{\infty}$  relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Comparaison du raffinement h-adaptatif global automatique et de LDC

Plusieurs remarques peuvent être faites à partir de cette courbe. Tout d'abord, si nous comparons les versions directe et successive du raffinement h-adaptatif global, nous observons que les temps de calcul sont équivalents jusqu'à des mailles locales de taille  $16.6 \mu\text{m}$  (soit des erreurs de l'ordre de  $2.5 \cdot 10^{-3}$ ). Puis le raffinement successif devient plus rapide, même en comptant le temps de génération du maillage, puisque par exemple pour une erreur de  $1 \cdot 10^{-3}$  (mailles fines de taille  $1.7 \mu\text{m}$ ), le calcul effectué sur un maillage de type h-adaptatif global successif est 24 fois plus rapide que sur un maillage h-adaptatif global direct.

Si on s'intéresse maintenant au temps de génération du maillage lors de la génération successive du maillage final, il est tout d'abord très faible lorsque les maillages sont grossiers (i.e. pour des tailles de maille jusqu'à  $27 \mu\text{m}$ ), puis se stabilise autour de 50% du temps total, c'est-à-dire que la génération du maillage coûte aussi cher que le calcul final sur le maillage successif. L'intérêt de pouvoir réutiliser le maillage généré, si l'étude s'y prête, est donc clairement mis en avant. Cependant, même en comptant le temps de génération, ce type de raffinement est très compétitif par rapport au raffinement *a priori* utilisé pour les études d'IPG. En dehors de l'intérêt évident de l'automatisation du processus de raffinement, qui permet de s'affranchir de la connaissance de l'utilisateur, la génération automatique du maillage conduit à des performances légèrement meilleures que la génération *a priori*, en tant de calcul et en nombre de nœuds. Ceci est dû principalement au fait que le maillage *a priori* possède des zones de raffinement plus larges afin de tenir compte d'une ouverture éventuelle de la fissure. Par exemple, pour une maille locale de taille  $1.7 \mu\text{m}$ , soit des



erreurs de l'ordre de  $1.10^{-3}$ , le maillage h-global généré successivement nécessite 12 % de temps de calcul de moins que le maillage h-global *a priori* si on compte le temps de génération du maillage pour le raffinement successif, et même 62 % si on ne s'intéresse qu'au temps de résolution sur le maillage final.

Pour finir, si nous comparons à présent les temps de résolution de la méthode LDC et du raffinement h-adaptatif global, la résolution à l'aide de la méthode LDC conduit à des temps plus longs pour les maillages les plus grossiers (jusqu'à des mailles de taille  $13.6 \mu\text{m}$  soit des erreurs de l'ordre de  $3.10^{-3}$ ). Puis, la méthode LDC devient plus intéressante que les méthodes de raffinement h-adaptatif global. Par exemple, pour une erreur de  $1.10^{-3}$  (soit des mailles fines de  $1.7 \mu\text{m}$ ), la méthode LDC nécessite déjà 32 fois moins de temps CPU que le raffinement h-adaptatif global direct et 1.3 fois moins de temps que le raffinement successif en tenant compte du temps total. Si on suppose que le maillage généré par la méthode h-adaptative globale successive est conservé, et donc qu'on ne tient plus compte du coût de génération du maillage, la méthode LDC devient alors environ 2 fois plus longue, toujours pour une erreur de  $1.10^{-3}$ . Cependant, si on s'intéresse à des erreurs encore plus faibles, on voit que la méthode LDC a tendance à devenir aussi plus intéressante que le raffinement h-adaptatif successif même sans temps de génération de maillage.

Afin de mieux quantifier l'intérêt respectif de la méthode LDC et du raffinement h-adaptatif global, nous nous intéressons à présent au nombre de nœuds nécessaires à chaque méthode, voir la figure III.27. Le nombre de nœuds calculé correspond au nombre total de nœuds de tous les niveaux pour la méthode LDC mais au nombre de nœuds du maillage raffiné final pour les méthodes h-adaptatives globales. Il faut donc garder à l'esprit que pour la méthode LDC, chaque maillage étant traité séparément, le nombre maximal de nœuds par grille est inférieur à la valeur indiquée ici.

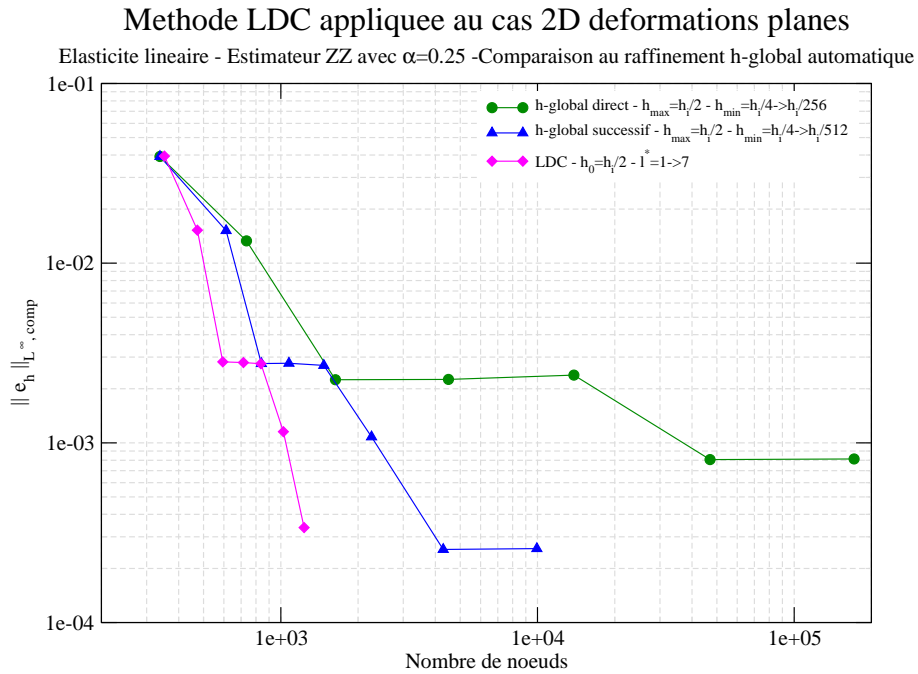


FIGURE III.27 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du nombre de nœuds - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Comparaison du raffinement h-adaptatif global automatique et de LDC

A part pour une erreur très élevée ( $4 \cdot 10^{-2}$ ), une différence visible entre chaque méthode apparaît et celle-ci ne fait que croître avec la diminution de l'erreur.

Ainsi, concernant le raffinement h-adaptatif global, la génération successive du maillage s'avère immédiatement plus efficace qu'une génération directe en terme de nombre de nœuds. Ce résultat était attendu, puisque l'intérêt de la génération successive du maillage est justement de diminuer le nombre de nœuds du maillage final. On peut remarquer que cet intérêt croît exponentiellement à mesure que l'écart croît entre la taille de maille du maillage initial et celle du maillage raffiné. En effet, alors que la génération successive ne fait économiser que 17% des nœuds pour des erreurs de  $1.5 \cdot 10^{-2}$  (soit des mailles fines de  $27 \mu\text{m}$ ), elle nécessite 95% de nœuds en moins pour des erreurs de  $1 \cdot 10^{-3}$  (soit des mailles fines de  $1.7 \mu\text{m}$ ).

De même, la méthode LDC est immédiatement plus économe en terme de nœuds que les méthodes de raffinement h-adaptatif globales. Elle est clairement plus intéressante que le raffinement h-adaptatif global direct, puisqu'elle génère entre 36% de moins et 98% de nœuds en moins que le raffinement h-adaptatif global direct, pour des erreurs allant de  $1.5 \cdot 10^{-2}$  à  $1 \cdot 10^{-3}$  (soit des tailles de mailles de  $27 \mu\text{m}$  à  $1.7 \mu\text{m}$ ). Elle s'avère également plus efficace que le raffinement h-adaptatif successif. Le gain est déjà de 23% des éléments pour des mailles de taille  $27 \mu\text{m}$  (soit une erreur de  $1.5 \cdot 10^{-2}$ ) et la méthode LDC va nécessiter jusqu'à 71% d'éléments en moins pour des mailles légèrement inférieures à  $1 \mu\text{m}$ , soit des erreurs de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-4}$ .

## Conclusion

Pour résumer, l'intérêt d'un maillage h-raffiné global successif a été montré ici, que ce soit sur le plan du temps CPU ou de l'espace mémoire utilisé. Ce type de maillage concurrence largement le maillage *a priori* utilisé actuellement pour simuler l'IPG (même en comptant le temps de génération du maillage final).

Par ailleurs, la méthode LDC est très intéressante en terme de nombre de nœuds. Elle devient également compétitive en terme de temps de calcul par rapport au h-raffinement global successif (qui est la plus performante des méthodes de h-raffinement global testées ici) pour des erreurs inférieures à  $1 \cdot 10^{-3}$  (soit des tailles de maille de l'ordre de  $2 \mu\text{m}$ ).

Cependant, si le but du raffinement de maillage est d'obtenir un même maillage optimal à utiliser pour de nombreuses études, la méthode h-globale successive semble la plus intéressante en terme de temps CPU, bien qu'elle soit moins intéressante que la méthode LDC en terme de nombre de nœuds.

Le solveur LDC combiné à l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ semble un outil très intéressant pour simuler des singularités locales. En effet, même pour un cas test simple, qui est *a priori* défavorable au solveur LDC (2D, élasticité linéaire, résolu précisément et rapidement sur un maillage mono-grille étiré), la méthode LDC nous permet de gagner de l'espace mémoire et d'être compétitive en temps CPU par rapport aux méthodes de h-raffinement dès des tailles de maille locale de  $13.6 \mu\text{m}$ .

### III.4.2.b Cas 3D multi-singularités

Dans cette partie, une comparaison entre la méthode LDC et une résolution h-adaptative globale est réalisée pour le cas 3D. Nous utilisons pour la méthode LDC les maillages réguliers obtenus sur la figure III.14 p.86 avec  $\alpha = 0.25$ ,  $h_0 = h_i = 629 \mu\text{m}$  et  $1 \leq l^* \leq 4$ . Les maillages du raffinement h-adaptatif global sont similaires à ceux utilisés actuellement afin de simuler l'IPG (voir la figure I.7(c) p.10). En effet, le but de cette thèse est d'améliorer les performances obtenues jusqu'à présent pour la simulation de l'IPG. De plus, nous avons vu dans la section III.4.2.a que

le maillage *a priori* présente de très bonnes performances comparables à celles d'un raffinement h-adaptatif global successif.

Les résultats sont présentés sur la figure III.28.

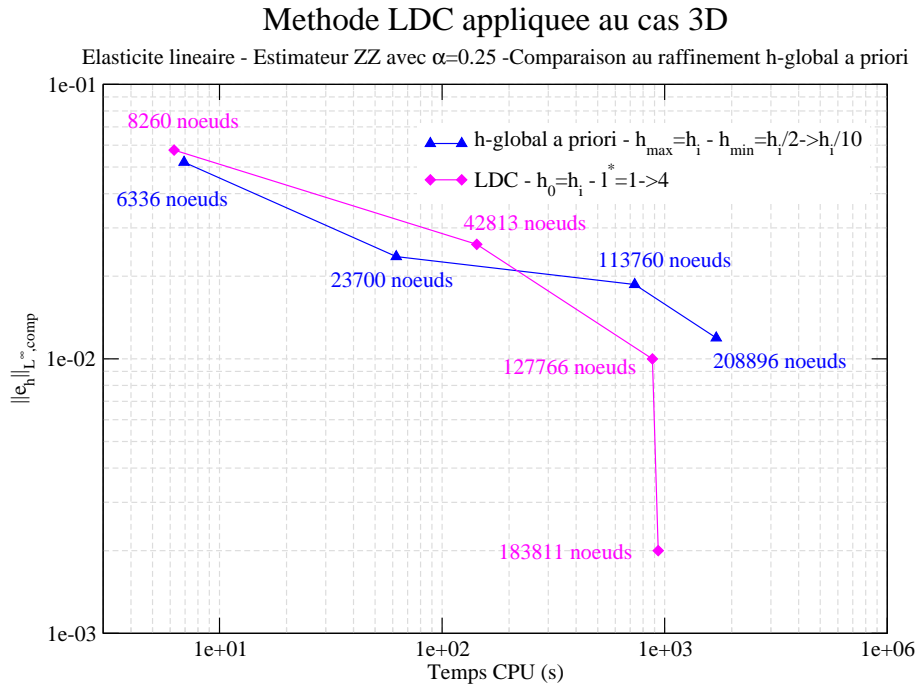


FIGURE III.28 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Comparaison du raffinement h-adaptatif global *a priori* et de LDC

Le solveur LDC devient très vite intéressant, particulièrement en terme d'espace mémoire. Pour des erreurs inférieures à  $2 \cdot 10^{-2}$  (soit des tailles de mailles de l'ordre de  $150 \mu\text{m}$ ), la méthode LDC devient de plus en plus intéressante en terme de temps de calcul. Ainsi, pour une erreur d'environ  $1 \cdot 10^{-2}$ , soit des tailles de mailles de  $80 \mu\text{m}$  environ, la méthode LDC permet d'économiser 39% des nœuds et 48% du temps CPU par rapport au raffinement h-adaptatif global. Le gain en temps est proportionnellement plus important car l'ensemble des nœuds est en réalité réparti sur 4 niveaux de calculs pour la méthode LDC. Ainsi, le nombre de nœuds maximal traité par résolution est réduit de 59% en utilisant la méthode LDC, toujours pour une erreur d'environ  $1 \cdot 10^{-2}$ .

De plus, du fait de la différence croissante en nombre de nœuds entre les deux méthodes, une résolution sur le maillage h-adaptatif global ne peut plus être réalisée pour obtenir des erreurs aussi précises que celles obtenues à l'aide du solveur LDC. Pour la machine utilisée ici, la taille de maille locale minimale est de  $h_i/10$  pour le raffinement h-adaptatif global alors que la méthode LDC n'est pas encore limitée à des tailles de maille de  $h_i/16$ .

### III.4.2.c Conclusion

Concernant les cas tests industriels simplifiés étudiés ici, l'utilisation de la méthode LDC devient très vite intéressante par rapport à une méthode de raffinement de type h-adaptatif global. En effet, pour les simulations 2D, la méthode LDC permet toujours d'économiser des ddl par rapport au raffinement h-adaptatif global pour une même erreur (ou une même taille de maille locale), quelle

que soit la stratégie de raffinement (directe ou successive) choisie pour ce dernier. De plus, dès que la taille de maille devient inférieure à  $10\ \mu\text{m}$  (soit des erreurs relatives maximales inférieures à  $3 \cdot 10^{-3}$ ), la méthode LDC permet également d'économiser du temps CPU.

Concernant les simulations 3D, le gain en terme de temps CPU tout comme en terme de nombre de nœuds apparaît dès que la taille de maille devient inférieure à  $150\ \mu\text{m}$  (soit des erreurs relatives inférieures à  $2 \cdot 10^{-2}$ ). De plus, à moyens informatiques constants, la méthode LDC permet d'atteindre des tailles de mailles localement plus fines que le h-raffinement global.

Ces résultats nous permettent d'être confiants quant à l'utilisation du solveur LDC pour des problèmes mécaniques plus complexes.

### III.4.3 Raffinement h-adaptatif local

Pour finir, nous avons comparé les performances de la méthode LDC par rapport à la méthode de raffinement h-adaptatif local. En effet, cette méthode de raffinement possède une philosophie très proche de LDC, puisque seuls les éléments détectés sont raffinés et rajoutés au maillage initial, générant ainsi un maillage non conforme mais optimal en termes de ddl. Il faut alors utiliser un solveur adapté à la prise en compte de non conformité de maillage. Le maillage généré est ainsi similaire à la superposition des grilles LDC. Par contre, contrairement au cas de la méthode LDC, tous les ddl du problème sont traités simultanément.

#### III.4.3.a Utilisation de la méthode de raffinement h-adaptatif local

Le cas test étudié est le cas  $2D(r, \theta)$ . La première étape pour utiliser une méthode de raffinement h-adaptatif local consiste à générer le maillage raffiné. Pour cela, nous avons utilisé l'outil de raffinement de type h-local disponible dans CAST3M. Celui-ci nécessite la donnée d'un champ de densité du maillage (i.e. un champ contenant la taille de maille locale voulue). Afin d'obtenir ce champ de façon automatique, et pour se rapprocher de la philosophie appliquée à la méthode LDC, nous avons décidé d'utiliser l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ.

Nous utilisons ici la même technique de détection des éléments à raffiner que celle utilisée pour la méthode LDC avant structuration (cf. section III.1.1). Le critère de raffinement choisi est  $\alpha = 0.25$ . La structuration de la zone détectée est inutile puisque le maillage final va dépendre de la densité de maille fournie. Les éléments détectés à l'aide du champ d'erreur estimé par ZZ de la figure III.6 p.77 sont visibles sur la figure III.29 pour  $h_0 = h_i/2 = 109\ \mu\text{m}$ .

On définit alors sur ces éléments une densité du maillage à partir de l'erreur locale donnée par ZZ. Pour cela, on réduit le champ obtenu par l'estimateur ZZ sur la zone à raffiner  $\Omega_r$ . Le pas de maillage minimal  $h_{l^*}$  souhaité est calculé :

$$h_{l^*} = \frac{h_0}{r^{l^*}}$$

où, de façon similaire à l'approche LDC, on a :

- $h_0$  : taille de maille du maillage grossier
- $r$  : rapport de raffinement (2 ici)
- $l^*$  : nombre de raffinement

La nouvelle densité  $h_L$  de l'élément  $L \in \Omega_r$  est alors définie par :

$$h_L = \left( \max_{K \in \Omega_r} e_K \right) \frac{h_{l^*}}{e_L}$$

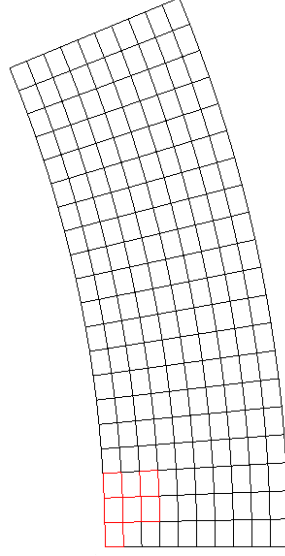


FIGURE III.29 – Exemple d'éléments à raffiner (en rouge) pour le raffinement h-adaptatif local non conforme - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$

en notant  $e_K$  l'erreur estimée par ZZ sur l'élément  $K$ .

Le champ de densité sur le maillage  $G_0$  est alors obtenu en utilisant sur la zone à raffiner les valeurs calculées et sur le reste du maillage la densité initiale  $h_0$ .

La procédure de raffinement de CAST3M crée ensuite à partir de cette densité un nouveau maillage raffiné localement. Durant cette génération, les relations permettant de traiter les non conformités sont également créées. Un exemple de maillage raffiné est tracé sur la figure III.30(a), pour  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$ , à comparer avec les maillages LDC obtenu pour le même pas local.

Nous pouvons remarquer que la zone détectée est quasiment entièrement raffinée avec le pas d'espace le plus fin. Les éléments de taille la plus fine sont donc plus nombreux que dans le cas de la méthode LDC. Ceci s'explique par le fait que l'estimateur et donc le calcul de la densité sont appliqués sur le maillage grossier de départ. Le maillage raffiné est donc fortement dépendant de la taille de maille initiale. De plus, la qualité des maillages obtenus dépend aussi de la façon de calculer la densité.

Une étude de convergence en maillage a alors été réalisée à partir de la technique de raffinement exposée ici. La norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité est disponible sur la figure III.31.

A part pour un maillage initial de taille de maille  $h_0 = h_i$ , on retrouve la convergence en  $O(d_{h_{fin}})$  obtenue avec la méthode LDC. Ceci nous permet de vérifier que l'ajout de relations de non conformités dans la matrice du système linéaire ne dégrade pas la précision de la solution calculée. Le décalage obtenu pour le cas  $h_0 = h_i$  s'explique par le fait que le maillage de départ est trop grossier pour l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ utilisé dans le processus de raffinement. En effet, pour ce maillage, les éléments touchant la singularité ne sont pas détectés, voir la figure III.32(a). Notre définition de la nouvelle densité conduit alors à ne pas raffiner les éléments situés à l'intérieur de la gaine. Cependant, l'opération de raffinement non conforme va quand même conduire à raffiner cette zone lorsque la taille de maille locale voulue diminue (cf. figure III.32(b)).

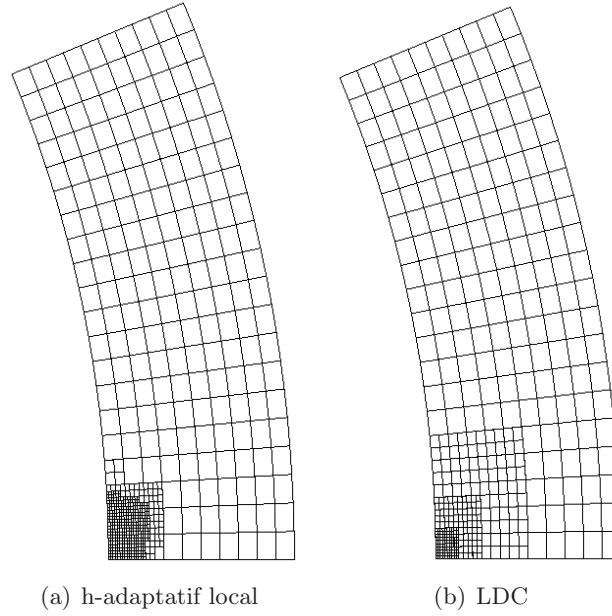


FIGURE III.30 – Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif local non conforme et par la méthode LDC - Cas  $2d(r, \theta)$  - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

Mais les éléments jouxtant la singularité n'atteignent jamais la taille de maille minimale (cf. figure III.32(b)), d'où le décalage observé sur la courbe de convergence. Ce phénomène, dû principalement au fait que le maillage initial est très grossier, n'apparaît pas dans le cas du raffinement LDC grâce au principe d'élargissement inhérent à la méthode (définition d'une zone de sécurité).

#### III.4.3.b Comparaison des méthodes LDC et h-locale

Nous avons vu que la méthode LDC et la méthode h-adaptative locale avaient des philosophies de raffinement proches et permettaient toutes les deux d'obtenir la convergence optimale en  $O(d_{h_{fin}})$ . Néanmoins, certaines caractéristiques des deux méthodes étant différentes (solveur, ddl par maillage), nous avons voulu comparer les performances de ces deux méthodes.

Pour cela, le nombre de nœuds des maillages obtenus via les deux méthodes sont affichés dans le tableau III.5. Pour le h-raffinement local, nous avons indiqué le nombre de nœuds du maillage non conforme obtenu après raffinement. Pour la méthode LDC, nous avons noté la somme du nombre de nœuds de l'ensemble des niveaux générés ainsi que le nombre maximal de nœuds traités simultanément (correspondant au niveau le plus lourd, généralement le maillage initial).

Si on ne s'intéresse qu'au nombre maximal de nœuds traités simultanément, la méthode LDC est toujours plus intéressante que le h-raffinement local du fait de la séparation des ddl du problème en plusieurs niveaux. Cette différence tend à s'estomper lorsque le maillage de départ est très fin, car les deux méthodes n'ajoutent alors qu'un très faible pourcentage d'éléments au maillage initial. La méthode LDC est d'autant plus intéressante que le maillage initial est grossier et que de nombreux sous-niveaux sont générés. Par exemple, pour les maillages avec  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 4$  (soit des tailles

## Methode h-local appliquee au cas 2D deformations planes

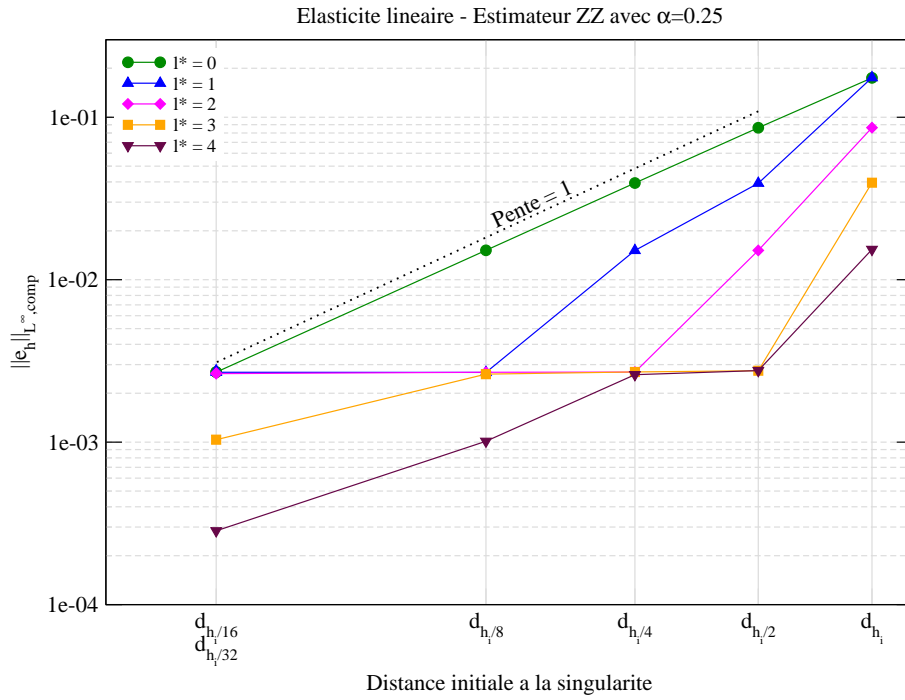


FIGURE III.31 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Raffinement h-adaptatif local - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

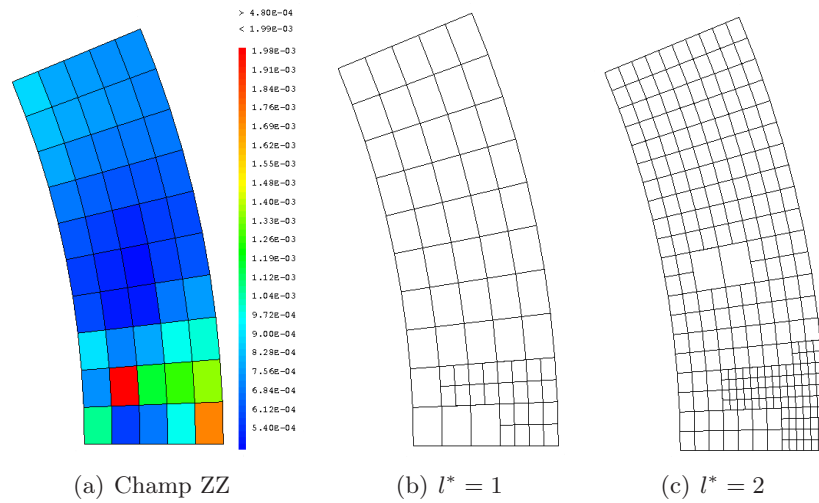


FIGURE III.32 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ et maillages obtenus après raffinement h-adaptatif local - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i$

des mailles d'environ  $7 \mu\text{m}$ ), le maximum de nœuds traités simultanément par la méthode LDC est 8.4 fois moins important que le nombre de nœuds du maillage avec raffinement h-adaptatif local. Si on s'intéresse maintenant au nombre total de nœuds, nous obtenons globalement la même chose



Nombre de nœuds du maillage composite en fonction de la méthode de raffinement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i/2$	231	LDC total : 352 LDC max : 231 h-loc : 251	LDC total : 473 LDC max : 231 h-loc : 340	LDC total : 594 LDC max : 231 h-loc : 669	LDC total : 715 LDC max : 231 h-loc : 1935
$h_i/4$	861	LDC total : 982 LDC max : 861 h-loc : 881	LDC total : 1103 LDC max : 861 h-loc : 957	LDC total : 1224 LDC max : 861 h-loc : 1252	LDC total : 1345 LDC max : 861 h-loc : 2319
$h_i/8$	3321	LDC total : 3442 LDC max : 3321 h-loc : 3341	LDC total : 3563 LDC max : 3321 h-loc : 3414	LDC total : 3684 LDC max : 3321 h-loc : 3703	LDC total : 3871 LDC max : 3321 h-loc : 4750
$h_i/16$	13041	LDC total : 13162 LDC max : 13041 h-loc : 13057	LDC total : 13293 LDC max : 13041 h-loc : 13137	LDC total : 13470 LDC max : 13041 h-loc : 13423	LDC total : 13679 LDC max : 13041 h-loc : 14485
$h_i/32$	51681	LDC total : 51802 LDC max : 51681 h-loc : 51686	LDC total : 51989 LDC max : 51681 h-loc : 51720	LDC total : 52198 LDC max : 51681 h-loc : 51854	LDC total : 52385 LDC max : 51681 h-loc : 52344

TABLE III.5 – Comparaison entre les méthodes de raffinement LDC ( $r = 2$ ) et h-locale non conforme - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Nombre de nœuds totaux et maxima locaux

pour les deux méthodes. Le h-raffinement local est légèrement plus intéressant que la méthode LDC si  $l^* \leq 2$  et légèrement moins intéressant sinon. En effet, comme nous l'avons fait remarquer au début de cette section, la localisation du h-raffinement est fortement dépendante de la taille de maille initiale. La génération en une étape d'un maillage très raffiné par rapport au maillage initial n'est donc pas efficace. Au contraire, tant que le rapport de raffinement reste faible, la méthode LDC est légèrement pénalisée car elle conduit à raffiner plus d'éléments, en particulier à cause de la procédure d'élargissement (afin de maintenir l'ensemble des éléments détectés dans la zone de correction  $\hat{A}_l$ , voir la section II.1.2.c).

Les résultats obtenus en terme de ddl par les deux méthodes restent néanmoins assez comparables dès que les maillages initiaux ne sont pas trop grossiers.

Nous avons ensuite comparé les temps de calcul de chaque méthode, en fonction des paramètres du raffinement ( $h_0, l^*$ ). Les valeurs sont disponibles dans le tableau III.6. Les temps indiqués comprennent l'ensemble du temps nécessaire à la génération du maillage. Ils incluent par exemple le calcul sur le maillage initial et la génération des relations de non-conformité pour la méthode h-adaptative locale.

Hormis pour un maillage initial assez grossier ( $h_0 = h_i/2$ ), la méthode LDC est globalement plus rapide et permet d'économiser jusqu'à un facteur 20 sur le temps de calcul. Ce gain est d'autant plus marqué que le maillage initial est fin. Ceci est dû au coût prohibitif de la génération du maillage non conforme (avec relations de non conformités) qui peut atteindre jusqu'à 65% du temps de calcul pour la méthode de h-raffinement local.



Temps CPU en fonction de la méthode de raffinement					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i/2$	$2.0 \cdot 10^{-2}$ s	LDC : $7.0 \cdot 10^{-2}$ s h-loc : $5.0 \cdot 10^{-2}$ s	LDC : $1.4 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : $6.0 \cdot 10^{-2}$ s	LDC : $2.2 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : $1.0 \cdot 10^{-1}$ s	LDC : $2.8 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : $2.6 \cdot 10^{-1}$ s
$h_i/4$	$8.0 \cdot 10^{-2}$ s	LDC : $2.0 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : $2.7 \cdot 10^{-1}$ s	LDC : $2.9 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : $2.8 \cdot 10^{-1}$ s	LDC : $3.2 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : $3.6 \cdot 10^{-1}$ s	LDC : $4.1 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : $6.4 \cdot 10^{-1}$ s
$h_i/8$	$4.1 \cdot 10^{-1}$ s	LDC : $8.3 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : 1.9 s	LDC : $8.6 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : 2.3 s	LDC : $9.2 \cdot 10^{-1}$ s h-loc : 3.2 s	LDC : 1.0 s h-loc : 3.8 s
$h_i/16$	2.7 s	LDC : 4.8 s h-loc : $2.2 \cdot 10^1$ s	LDC : 4.9 s h-loc : $2.8 \cdot 10^1$ s	LDC : 5.0 s h-loc : $3.6 \cdot 10^1$ s	LDC : 5.1 s h-loc : $4.5 \cdot 10^1$ s
$h_i/32$	$1.9 \cdot 10^1$ s	LDC : $4.0 \cdot 10^1$ s h-loc : $2.8 \cdot 10^2$ s	LDC : $4.0 \cdot 10^1$ s h-loc : $4.0 \cdot 10^2$ s	LDC : $4.0 \cdot 10^1$ s h-loc : $5.2 \cdot 10^2$ s	LDC : $4.0 \cdot 10^1$ s h-loc : $6.4 \cdot 10^2$ s

TABLE III.6 – Comparaison entre les méthodes de raffinement LDC ( $r = 2$ ) et h-locale non conforme - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Temps CPU

### III.4.3.c Raffinements successifs

Compte-tenu des conclusions précédentes et de l'étude faite en section III.4.2.a, il semble prometteur d'appliquer le raffinement h-adaptatif local de manière récursive afin de générer le maillage raffiné. Le gain en nombre de nœuds semble évident, mais le gain en temps de calcul reste à quantifier, car plusieurs calculs sur des maillages non conformes doivent alors être réalisés. Pour cela, nous avons essayé d'appliquer une procédure de raffinement h-adaptatif local récursive. Cependant, contrairement au cas du raffinement h-adaptatif global, l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ choisi ne permet pas cette récursivité. En effet, à partir du deuxième raffinement, l'estimateur ne détecte plus la discontinuité de pression, mais la zone de raffinement intermédiaire, voir par exemple la figure III.33.

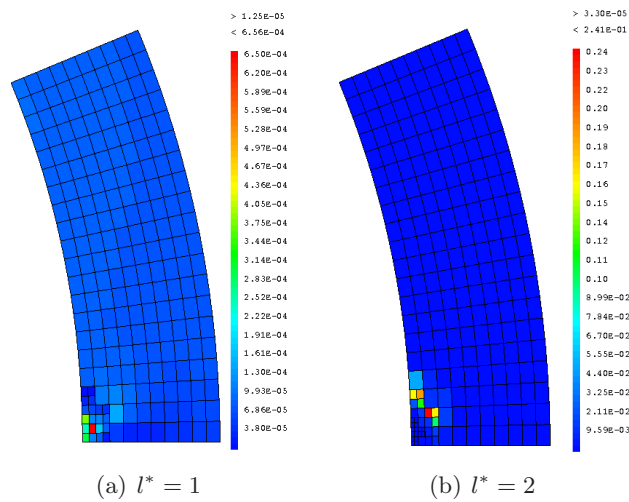


FIGURE III.33 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ lors d'un raffinement h-adaptatif local successif - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité linéaire -  $h_0 = h_i/2$

L'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ n'est donc pas applicable pour une génération successive de maillages non-conformes raffinés. Des développements supplémentaires (utilisation d'un autre estimateur d'erreur, génération de zones raffinées structurées, ...) sont donc nécessaires. Comme ces développements n'entrent pas dans les objectifs de la thèse, nous avons simplement comparé le raffinement h-adaptatif local dans ses versions directe et successive pour quelques maillages. Le niveau local sera fixé à  $l^* = 2$  pour permettre à l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ de détecter correctement la discontinuité de pression. Les résultats sont rassemblés dans le tableau III.7.

Performances du raffinement h-adaptatif local				
	$h_i/2$	$h_i/4$	$h_i/8$	$h_i/16$
$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	'd' : $1.51 \cdot 10^{-2}$ 's' : $1.48 \cdot 10^{-2}$	'd' : $2.70 \cdot 10^{-3}$ 's' : $3.28 \cdot 10^{-3}$	'd' : $2.69 \cdot 10^{-3}$ 's' : $2.92 \cdot 10^{-3}$	'd' : $2.64 \cdot 10^{-3}$ 's' : $3.02 \cdot 10^{-3}$
Nombre de nœuds	'd' : 340 's' : 268	'd' : 957 's' : 898	'd' : 3414 's' : 3354	'd' : 13137 's' : 13062
Temps CPU	'd' : $5.0 \cdot 10^{-2}$ s 's' : $9.0 \cdot 10^{-2}$ s	'd' : $2.8 \cdot 10^{-1}$ s 's' : $4.1 \cdot 10^{-1}$ s	'd' : 2.3 s 's' : 3.3 s	'd' : $2.8 \cdot 10^1$ s 's' : $3.8 \cdot 10^1$ s

TABLE III.7 – Comparaison entre les versions directe ('d') et successive ('s') du raffinement h-adaptatif local - Cas 2D(r,  $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  -  $l^* = 2$

La première conclusion que l'on peut tirer de ce tableau est que l'utilisation d'une génération successive du maillage raffiné conduit à une légère dégradation de la correction. Nous pouvons donc en déduire que les zones les plus raffinées sont dans ce cas trop localisées et que l'erreur de pollution devient alors non négligeable.

Si l'on s'intéresse au nombre de nœuds, le raffinement successif permet comme prévu une économie. Cependant, si ce gain est intéressant pour les maillages initiaux les plus grossiers (par exemple, le raffinement successif fait économiser 20% des nœuds pour un maillage tel que  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 2$ ), ce gain devient négligeable pour les maillages fins, car les zones de raffinement étaient déjà très localisées (par exemple, le gain du raffinement successif n'est plus que de 0.6% pour un maillage tel que  $h_0 = h_i/16$  et  $l^* = 2$ ). Le faible gain en nombre de nœuds et les nombreux calculs nécessaires à la génération successive d'un maillage raffiné ne permettent pas au raffinement h-local successif d'être compétitif en terme de temps CPU par rapport au raffinement h-local direct.

Pour ce cas test, l'intérêt d'un raffinement h-local successif ne semble pas évident sauf pour générer un maillage optimal pour une série d'étude. Cependant cette conclusion est limitée par le nombre de raffinement imposé par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ utilisé.

#### III.4.3.d Conclusion

Ces premiers résultats confirment les fortes potentialités de la méthode LDC. En effet, les performances de la méthode LDC sont comparables à celles de la méthode h-adaptative locale, connue et utilisée pour ses bonnes performances. La méthode LDC est même plus intéressante en terme de ddl, particulièrement si on regarde le nombre de ddl traités simultanément, et en terme de temps de résolution si le temps de génération du maillage h-local non conforme est pris en compte. Enfin, le traitement d'une évolution temporelle ne pose pas de problème dans le cas de la méthode LDC, alors qu'il nécessite pour le raffinement h-adaptatif local non conforme de savoir déraffiner le maillage, mais également d'être capable de redéfinir un nouveau raffinement à partir d'un calcul fait sur un maillage non conforme, ce qui, on l'a vu, n'est pas possible avec l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ utilisé dans cette étude.

## Conclusion

La combinaison de la méthode LDC et de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ est très satisfaisante. En effet, en plus de permettre de s'affranchir de la connaissance de l'utilisateur pour générer directement les zones à raffiner, cette automatisation permet également d'optimiser la taille des zones raffinées. En particulier, pour le cas 3D multi-singularités, complexe du fait de la présence de deux singularités croisées de tailles caractéristiques différentes, l'utilisation de l'estimateur d'erreur permet d'obtenir des maillages raffinés très localisés. Cependant, la principale difficulté de cette automatisation réside dans le choix d'un critère de raffinement, comme pour toute méthode de raffinement automatique. Un critère unique a été proposé et testé avec succès dans cette étude.

Les fortes potentialités de la méthode LDC, déjà perceptibles au chapitre II, ont ensuite été confirmées. Tout d'abord, un rapport de raffinement supérieur à 2 a été testé. Un tel rapport permet de générer moins de sous-niveaux afin d'atteindre une taille de maille locale voulue. Les maillages obtenus sont plus coûteux en termes de ddl mais le temps de résolution total peut devenir plus rapide par le gain en nombre de problèmes à résoudre.

Notre méthode a ensuite été comparée à d'autres méthodes de raffinement local, ce qui est assez rare dans la littérature. Dans un premier temps, nous avons essayé d'évaluer l'apport possible d'une stratégie FMG (Full Multi-Grid) locale. Avec l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ choisi, le lissage préliminaire de la solution ne modifie pas la zone de raffinement détectée automatiquement. Une étude plus poussée serait nécessaire afin de quantifier l'intérêt des cycles FMG concernant l'accélération de la convergence du calcul.

Nous avons ensuite comparé la méthode LDC à deux types de méthodes de raffinement h-adaptatif (qui sont les méthodes de raffinement les plus utilisées) : le raffinement global et le raffinement local non conforme. La méthode de raffinement utilisée jusqu'à présent au CEA afin de simuler l'IPG peut s'apparenter à une méthode h-adaptative globale avec un type d'éléments fixé (ici, des quadrangles). Malgré les bonnes performances du raffinement h-adaptatif global, la méthode LDC est plus intéressante du point de vue du temps de calcul mais surtout de l'espace mémoire, et cet intérêt est croissant à mesure que l'erreur souhaitée ou la taille de maille locale devient faible. Une génération successive et automatique du maillage h-global raffiné permet néanmoins d'obtenir des temps de calcul comparables à ceux de la méthode LDC. Par ailleurs, nous avons également montré que les performances de la méthode LDC sont similaires à celles de la méthode de raffinement h-adaptatif local en termes de ddl. Cependant, les potentialités offertes par la méthode LDC du point de vue de la simplicité de génération des sous-niveaux, de la résolution séparée de chaque sous-niveau et des solveurs utilisés (maillages conformes), conduisent cette méthode à devenir plus performante que la méthode h-adaptative locale en terme de temps CPU dès que la taille de maille ou que l'erreur souhaitée devient faible (inférieure à 1 %).

Nous allons à présent appliquer notre stratégie de raffinement à des lois de comportement non linéaires.



## Chapitre IV

# Application de la méthode LDC à des lois de comportement non linéaires

### Sommaire

---

Introduction . . . . .	113
IV.1 La méthode LDC en mécanique non linéaire . . . . .	113
IV.1.1 État de l'art . . . . .	113
IV.1.2 Extension de la méthode LDC pour des lois de comportement non linéaires et à effet d'histoire . . . . .	114
IV.1.3 Spécificités dues au solveur non linéaire de CAST3M . . . . .	116
IV.2 Problème contenant une non linéarité matérielle . . . . .	118
IV.2.1 Vérification de la méthode LDC pour une loi d'élasticité non linéaire . . . . .	118
IV.2.2 Performances de la méthode LDC par rapport au nombre de sous-niveaux . . . . .	121
IV.2.3 Comparaison à la méthode de raffinement h-adaptative globale . . . . .	124
IV.3 Ajout d'une évolution temporelle . . . . .	127
IV.3.1 Caractéristiques du problème . . . . .	127
IV.3.2 Vérification de la méthode LDC pour un problème non linéaire à effet d'histoire . . . . .	129
IV.3.3 Raffinement espace/temps . . . . .	130
IV.4 Modification dynamique du maillage . . . . .	140
IV.4.1 Projection des conditions initiales . . . . .	140
IV.4.2 Quelques éléments de validation . . . . .	143
IV.4.3 Modification de la position de la singularité . . . . .	144
Conclusion . . . . .	148

---



## Introduction

Le but de cette partie est de généraliser la méthode LDC à des comportements mécaniques non linéaires. Nous présentons dans un premier temps les modifications de l'algorithme permettant de traiter ce type de comportement. Puis la validation de cet algorithme se fait en deux temps afin de découpler les effets non linéaires des effets d'histoire. La première étape concerne ainsi la résolution d'un problème avec une non linéarité matérielle sans effet d'histoire. Une loi de comportement élastique non linéaire permettra d'apprécier les capacités de l'algorithme. Nous nous intéressons dans un deuxième temps à une loi de comportement non linéaire à effet d'histoire. Une loi de fluage de Norton sera ainsi introduite dans les cas tests. Enfin, une fois un algorithme de raffinement spatial adapté aux problèmes mécaniques non linéaires mis en place, nous nous intéressons à la modification dynamique du raffinement de maillage, et plus particulièrement au problème de la transmission des variables internes entre pas de temps sur les différents niveaux de maillages. Des résultats obtenus sur un cas test non linéaire sans effet d'histoire ont été publiés dans [Barbié *et al.*, 2012] et [Barbié *et al.*, 2013].

## IV.1 La méthode LDC en mécanique non linéaire

### IV.1.1 État de l'art

Les méthodes MGL et plus particulièrement la méthode LDC ont déjà été appliquées à des problèmes instationnaires. En effet, quand l'équation aux dérivées partielles à résoudre est spatio-temporelle, l'algorithme LDC peut être appliqué directement à chaque pas de temps car la discrétisation de la dérivée temporelle conduit à résoudre un problème en espace [Berger et Olinger, 1984, Berger et Colella, 1989, Belliard et Grandotto, 2003, Minero *et al.*, 2006]. Dans ce cas, le résidu construit par LDC via l'équation (II.2) tient alors implicitement compte de la discrétisation temporelle.

En effet, la méthode LDC décrite dans la section II.1 est générique et s'applique sans modification à des équations aux dérivées partielles non linéaires. Par contre, en général, la résolution du problème fin n'est plus exacte et l'hypothèse (II.4) n'est donc plus obligatoirement vérifiée (itérations de lissage). Il est alors nécessaire de tenir compte du résidu fin dans le calcul de la correction. Le second membre corrigé devient :

$$f_{l,r}^k = f_l^0 + \chi_{\hat{A}_l}(r_l^k(u) - \hat{r}_{l+1}^k(u)) \quad (\text{IV.1})$$

On peut remarquer que ce résidu est directement issu de celui utilisé dans l'algorithme multi-grille standard "Full Approximation Storage" (FAS, cf. Annexe A). Il nécessite un opérateur de prolongement dédié qui vérifie la conservation des efforts.

Dans le cas où le problème à résoudre obtenu après discrétisation de la dérivée temporelle est non linéaire en espace, le solveur utilisé se base classiquement sur un processus itératif. Comme la méthode LDC est également un processus itératif, se pose alors la question de l'imbrication des deux processus itératifs.

Les résultats publiés dans [Henson, 2003] montrent que pour résoudre un problème non linéaire à l'aide de la méthode MG standard, il est plus rapide d'appeler le solveur non linéaire au sein des itérations MG plutôt que d'appeler un processus MG linéaire au sein des itérations de linéarisation du problème. Étant donné le parallèle entre les méthodes MG et MGL, nous adoptons cette conclusion qui semble pouvoir également se transposer aux méthodes MGL et particulièrement à la méthode LDC qui est directement déduite de l'algorithme MG non linéaire FAS.

### IV.1.2 Extension de la méthode LDC pour des lois de comportement non linéaires et à effet d'histoire

En utilisant les notations de la section II.2.1, le problème mécanique quasi-statique non linéaire à résoudre s'écrit :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega & \text{(IV.2a)} \\ \sigma = \mathbf{C} : \varepsilon^{el} & & \text{(IV.2b)} \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + \operatorname{grad}^T(\mathbf{u})) & & \text{(IV.2c)} \\ \varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{nl} & & \text{(IV.2d)} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Gamma_U & \text{(IV.2e)} \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F} & \text{sur } \Gamma_F & \text{(IV.2f)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon^{el} & : \text{ tenseur des déformations élastiques linéaires} \\ \varepsilon^{nl} & : \text{ tenseur des déformations non linéaires} \end{cases}$$

Par rapport au problème linéaire (II.8), seule la loi de comportement a changé. Souvent, la partie non linéaire du tenseur des déformations est définie grâce à sa vitesse et dépend donc du temps. On a alors :

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \alpha) \quad \text{(IV.3)}$$

En notant  $(\dot{\cdot})$  la dérivée temporelle et  $\alpha$  un ensemble de variables internes du problème.

Peu d'auteurs en MGL [Biotteau *et al.*, 2012] se sont intéressés à des problèmes mécaniques avec une loi de comportement dépendant du temps telle que définie dans le problème précédent. La résolution d'équations non linéaires en déplacement implique alors d'effectuer une résolution itérative afin de vérifier la non linéarité de comportement.

Comme précisé précédemment, dans le cas de la mécanique des solides, la non linéarité provient souvent du comportement du matériau. La linéarisation du problème avant l'appel à l'algorithme MGL conduirait à ne vérifier la loi de comportement que sur le maillage grossier. Or, les grandeurs d'intérêt sont souvent liées aux variables internes. Il faut donc que l'algorithme de raffinement permette d'avoir accès à ces variables sur le maillage raffiné. Dans ce cas l'ordre d'imbrication des deux processus itératifs ne se pose pas. La résolution du problème non linéaire doit être appelée au sein des cycles MGL. Nous bénéficierons de plus de meilleures performances comme expliqué auparavant.

Par ailleurs, pour un problème quasi-statique non linéaire du type IV.2, le calcul du résidu n'est pas immédiat et nécessite d'appliquer la loi de comportement au champ de déplacement restreint. Une autre solution consisterait à restreindre aux points de Gauss du maillage grossier les contraintes calculées aux points de Gauss du maillage fin, ce qui complexifie la procédure de projection. Afin d'être le plus générique possible et de conserver l'utilisation du solveur non linéaire en "boîte noire", nous n'allons pas directement appeler la loi de comportement sur le champ de déplacement restreint. Nous allons imposer les valeurs du déplacement restreint en CL du problème non linéaire considéré sur le niveau grossier. Sur la partie non raffinée, un déplacement nul est imposé. Ce problème devient



alors contraint en déplacement et sa résolution se résume à l'intégration de la loi de comportement. Les efforts internes sur la partie raffinée et ainsi le résidu de la méthode LDC sont directement déduits des contraintes obtenues.

Enfin, pour les lois de comportement à effet d'histoire, il est nécessaire à chaque pas de temps de fournir à tous les niveaux de grilles des conditions initiales (CI) en plus des CL. Plusieurs solutions sont envisagées selon les informations conservées d'un pas de temps sur l'autre. Les deux approches classiques dans la littérature consistent à utiliser soit les informations de la grille grossière, soit les informations de la grille composite afin d'initialiser le pas de temps suivant. Ces deux approches seront testées dans la suite de notre étude.

Dans le cas non linéaire, l'algorithme LDC est donc couplé à l'algorithme classique de résolution non linéaire. Les grandes étapes de résolution d'un problème non linéaire sont alors les suivantes :

---

**Algorithme IV.1 : Méthode LDC multi-grilles non linéaire, avec second membre corrigé dans l'étape de prolongement et raffinement automatique avec estimateur d'erreur**

---

**Boucle en temps :**

Pour  $t = t_{ini}$  à  $t_{fin}$  par pas de  $\Delta t$

**Boucle LDC :**

**Initialisation :**

- Obtention des CI sur le niveau 0 à partir de l'état final convergé du pas de temps précédent sur le niveau 0
- Appel au solveur non linéaire pour obtenir la solution  $[U_0^0]$  du problème non linéaire avec pour effort volumique  $[F_0^0]$

**Itérations :** Calcul de  $[U_l^k]$

Pour  $k = 1$  à  $k^*$

- $[U_0^k] = [U_0^{k-1}]$

**I. Prolongement de  $l - 1$  à  $l$  : Résolution sur les grilles fines  $G_1$  :**

Pour  $l = 1$  à  $l^*$

- Si ( $k = 1$ )
  - (i) Si remaillage
    - (a) Application de l'estimateur d'erreur sur la solution  $[U_{l-1}^1]$  afin de détecter la zone à raffiner
    - (b) Raffinement de la zone détectée avec un rapport  $r_l$
    - (c) **Obtention des CI sur le problème de niveau  $l$  à partir des états finaux convergés du pas de temps précédent sur les niveaux  $l$  à 0**
  - Sinon
    - (a) Obtention des CI sur le problème de niveau  $l$  à partir de l'état final convergé du pas de temps précédent sur le niveau  $l$
  - (ii) Définition des valeurs des CL du problème continu sur  $\Gamma_l \cap \partial\Omega$  :  $[G_l]$  et  $[U_{D,l}]$ , qui seront inchangées au cours des itérations LDC
  - (iii) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_{l-1}^1]$

$$[U_{D,l}^1] = [P_{l-1}^l][U_{l-1}^1] \quad \text{sur } \Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$$

Réalisé en pratique grâce aux fonctions de forme

- (iv) Appel au solveur non linéaire pour obtenir la solution  $[U_l^1]$  du problème non linéaire ayant les CL  $[U_{D,l}^1]$  et  $[G_l]$  définies précédemment et l'effort volumique  $[F_l^0]$

– Sinon

- (i) Définition des valeurs des CL de Dirichlet imposées sur  $\Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$  par projection de  $[U_{l-1}^k]$

$$[U_{D,l}^k] = [P_{l-1}^l][U_{l-1}^k] \quad \text{sur } \Gamma_l \setminus (\Gamma_l \cap \partial\Omega)$$

Réalisé en pratique grâce aux fonctions de forme

- (ii) Appel au solveur non linéaire pour obtenir la solution  $[U_l^k]$  du problème non linéaire ayant les CL  $[U_{D,l}^k]$  et  $[G_l]$  définies précédemment et l'effort volumique :
- Si  $(l = l^*)$

$$[F_{l^*,p}^k] = [F_{l^*}^0]$$

- Sinon

$$[F_{l,p}^k] = [F_l^0] + [D_l^{k-1}] = [F_{l,r}^{k-1}]$$

## II. Restriction de $l + 1$ à $l$ : Correction des grilles grossières $G_l$ :

Pour  $l = l^* - 1$  à 0

- (i) Restriction de la solution fine  $[U_{l+1}^k]$  sur  $A_l$  :

$$[\tilde{U}_l^k] = [R_{l+1}^l][U_{l+1}^k] \quad \text{sur } A_l$$

- (ii) **Calcul du résidu local  $[D_l^k]$  :**

- On impose  $[\tilde{U}_l^k]$  sur  $A_l$
- On impose les efforts initiaux

$$[F_l^0] + [G_l]$$

- Appel au solveur non linéaire pour obtenir les efforts internes  $[\tilde{F}_{int,l}^k]$  du problème non linéaire ainsi défini
- Calcul du résidu local  $[D_l^k]$  à partir des efforts initiaux :

$$[D_l^k] = [\tilde{F}_{int,l}^k] - [F_l^0] - [G_l] \quad \text{sur } \overset{\circ}{A}_l$$

$$[D_l^k] = 0 \quad \text{ailleurs}$$

- (iii) Correction du second membre  $[F_{l,r}^k]$  :

$$[F_{l,r}^k] = [F_l^0] + [D_l^k]$$

- (iv) Appel au solveur non linéaire pour obtenir la solution  $[U_l^k]$  du problème non linéaire ayant les CL  $[U_{D,l}^k]$  et  $[G_l]$  définies précédemment et l'effort volumique  $[F_{l,r}^k]$

### IV.1.3 Spécificités dues au solveur non linéaire de CAST3M

Même si la méthode LDC est générique et s'applique à tout solveur non linéaire, nous présentons ici l'algorithme de résolution non linéaire de CAST3M car certaines de ses spécificités permettent de comprendre les performances de la méthode dans la suite de l'étude.

Nous avons choisi ici d'utiliser la procédure INCREPL de résolution d'un problème non linéaire sur un pas de temps de CAST3M [Pascal, 2007]. L'algorithme consiste à trouver l'incrément de déplacement sur le pas de temps par un schéma itératif de type quasi-Newton. Les conditions initiales (CI) sont déduites de la solution obtenue après convergence au pas de temps précédent. Ainsi, on initialise la solution en notant  $\Delta U^0 = 0$ ,  $\sigma^0$  la contrainte initiale du pas de temps

(correspondant à celle obtenue en fin de pas de temps précédent),  $F_{ext}$  les forces et déplacements imposés,  $F_{int}^0$  les forces internes initiales du pas de temps et  $K_{el}$  la matrice de rigidité élastique. L'algorithme de résolution d'INCREPL peut s'écrire pour  $k = 0$  jusqu'à convergence (ou nombre d'itérations maximal) :

- Résolution du système :

$$[K_{el}][\delta\Delta U^{k+1}] = [R^k] = [F_{ext}] - [F_{int}^k] \quad (IV.4)$$

On en déduit  $\Delta\varepsilon^{k+1}$ .

- Intégration de la loi de comportement :

$$\Delta\sigma^{k+1} = f(\Delta\varepsilon^{k+1}) \quad (IV.5)$$

On a alors  $\sigma^{k+1} = \sigma^k + \Delta\sigma^{k+1}$ .

- Calcul de  $F_{int}^{k+1}$  à partir de  $\sigma^{k+1}$ .
- Si  $\frac{\|R^{k+1}\|}{\|F_{ext}\|} < \text{précision}$ , fin.

Parmi les informations que l'on peut transmettre à la procédure INCREPL, celles utiles dans le cas de la méthode LDC sont la matrice de rigidité factorisée et l'estimation de la solution en déplacement en fin de pas de temps. En effet, ces informations vont permettre d'accélérer la résolution du problème non linéaire au cours des  $\wedge$ -cycles de la méthode LDC. L'estimation initiale transmise sera la solution obtenue sur le même niveau au  $\wedge$ -cycle précédent.

Cependant, l'intégration de la loi de comportement, qui représente la majorité du temps de calcul d'INCREPL, est réalisée de manière indépendante à chaque itération du solveur non linéaire. Les avantages de la méthode LDC (modification uniquement du second membre au cours des itérations) ne peuvent pas être utilisés dans la résolution de la loi de comportement. En effet, l'algorithme d'intégration de la loi de comportement présent dans CAST3M ne permet pas de tenir compte d'une estimation de la solution en contraintes. Par conséquent, contrairement au cas linéaire, le coût de résolution de la méthode LDC ne sera plus principalement représenté par le coût de résolution du premier  $\wedge$ -cycle.

## IV.2 Problème contenant une non linéarité matérielle

Dans cette partie, nous nous intéressons à la résolution par la méthode LDC d'un problème quasi-statique avec un comportement non linéaire mais indépendant du temps et de l'historique de chargement (comportement élastique non linéaire). Les vérifications réalisées dans la suite concernent le cas test 2D( $r, \theta$ ) (cf. section I.2.2).

Ce cas test est donc encore un cas d'application assez standard de la méthode LDC, étudié afin de vérifier si les spécificités de l'algorithme liées à la résolution du problème non linéaire sont bien prises en compte. Nous allons donc d'abord regarder la convergence en maillage puis apprécier les performances de la méthode, notamment en la comparant à une méthode de raffinement h-adaptatif global.

### IV.2.1 Vérification de la méthode LDC pour une loi d'élasticité non linéaire

La loi de comportement de l'équation (I.1b) est remplacée par un comportement élastique non linéaire, c'est-à-dire que  $\sigma = f(\varepsilon)$  simplement. Ce comportement nous permet de vérifier l'applicabilité de la méthode LDC à des lois de comportement non linéaires, en s'affranchissant du problème de l'évolution temporelle puisque le comportement de la structure est indépendant de l'historique du chargement. En effet, ce modèle de comportement est un comportement élastique (c'est-à-dire réversible) tel que le comportement en charge est similaire à un comportement plastique isotrope (non linéaire). Des comportements de ce type sont souvent utilisés pour des chargements monotones.

La loi de comportement est alors définie par une courbe de traction liant les déformations totales aux contraintes. Le comportement utilisé pour cette étude est visible sur la figure IV.1.

Courbe de traction élastique non linéaire

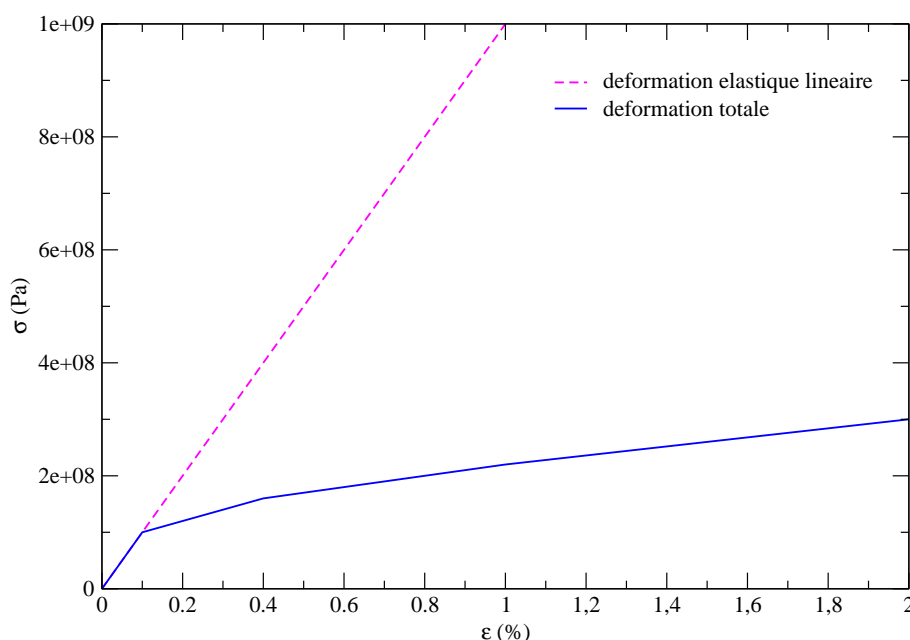


FIGURE IV.1 – Courbe de traction élastique non linéaire

Nous pouvons remarquer que cette loi a volontairement été choisie fortement non linéaire. Par

exemple, pour une contrainte de  $2 \cdot 10^8$  Pa qui est représentative de la contrainte dans la gaine, la déformation totale est de 0.8% alors que la déformation élastique linéaire n'est que de 0.2%.

Le même chargement que dans le cas de l'élasticité linéaire a été appliqué, sur 1 s. Une solution de référence a été obtenue sur un maillage uniforme fin ( $\simeq 0.5$  millions de ddl) de taille de maille  $2 \mu\text{m}$  dans chaque direction, calculée sur un pas de temps.

La figure IV.2 montre un exemple de champ d'erreur fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ pour cette loi de comportement. En comparant cette figure à la figure III.6 p.77 obtenue sur le même maillage pour une loi de comportement élastique linéaire, nous pouvons constater que l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ est influencé par la loi de comportement. En particulier, les niveaux d'erreur sont plus élevés, surtout au niveau de l'erreur minimale (multipliée par 2).

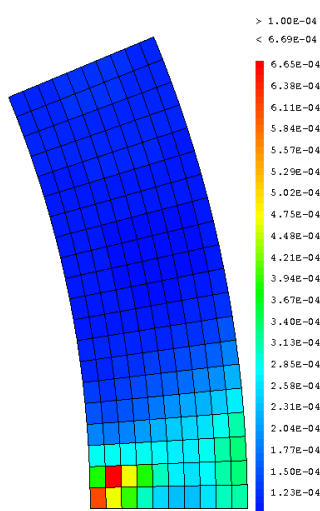


FIGURE IV.2 – Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire -  $h_0 = h_i/2$

L'erreur la plus forte est toujours localisée sur la même maille, près de la discontinuité de pression due à l'ouverture du fragment de pastille. Cependant, la zone possédant une erreur significative est beaucoup plus étendue que dans le cas linéaire, puisque sur cette figure toute l'épaisseur de la gaine est détectée. Pour des maillages moins grossiers, cette zone ne concerne plus toute l'épaisseur de la gaine, mais est quand même plus étendue qu'en linéaire.

Se pose alors la question du choix du critère de raffinement  $\alpha$  (cf. section III.1) afin de guider le processus de détection. Afin d'éviter une nouvelle étude paramétrique, nous avons choisi de tester les performances obtenues avec la valeur  $\alpha = 0.25$ , valeur ayant fait ses preuves pour l'élasticité linéaire (cf. chapitre III). Compte-tenu de la différence de réponse de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ, les différents niveaux de maillages obtenus seront différents du cas linéaire, comme nous pouvons le voir sur l'exemple de maillages imbriqués obtenus avec  $\alpha = 0.25$ ,  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$  de la figure IV.3, à comparer à ceux de la figure III.8 p.78.

Nous pouvons constater que la diffusion de l'erreur n'intervient que pour des niveaux grossiers puisque dès le deuxième sous-niveau, les maillages sont de nouveau très localisés autour de la zone de discontinuité de contact. Ces maillages sont alors à peine plus étendus que ceux obtenus pour l'élasticité linéaire (en moyenne une couche d'éléments de plus dans chaque direction par niveau).

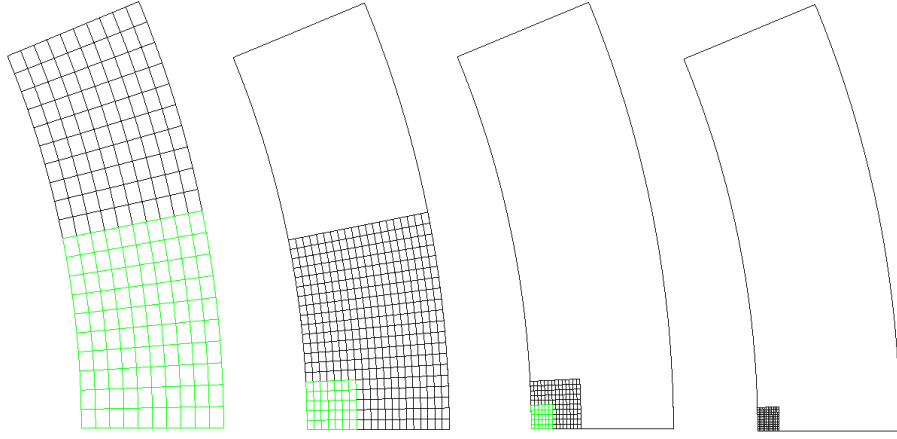


FIGURE IV.3 – Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité non linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

Nous avons étudié la convergence en maillage de la méthode LDC pour ce comportement non linéaire. Au vu des résultats des chapitres précédents, seules les normes composites ont été considérées. La norme  $L^2$  relative composite est reportée sur la figure IV.4 et la norme  $L^\infty$  relative composite dans le tableau IV.1.

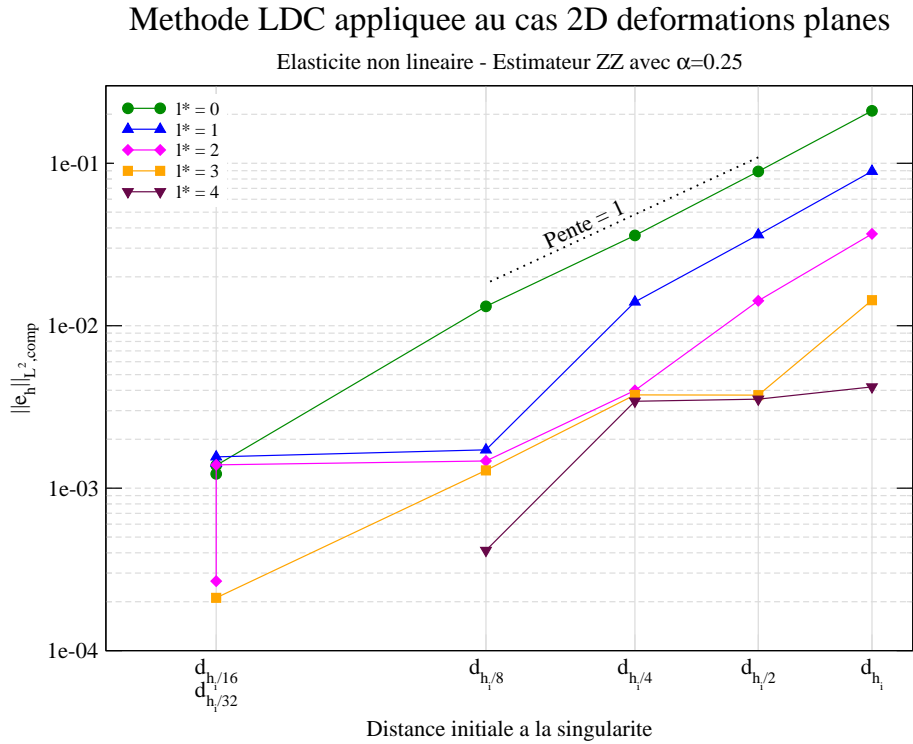


FIGURE IV.4 – Norme  $L^2$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$ avec $\alpha = 0.25$					
$h_0 \backslash l^*$	0	1	2	3	4
$h_i$	$2.60 \cdot 10^{-1}$	$1.20 \cdot 10^{-1}$	$5.14 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$5.80 \cdot 10^{-3}$
$h_i/2$	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$5.09 \cdot 10^{-2}$	$2.04 \cdot 10^{-2}$	$5.47 \cdot 10^{-3}$	$5.18 \cdot 10^{-3}$
$h_i/4$	$5.07 \cdot 10^{-2}$	$2.03 \cdot 10^{-2}$	$5.89 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-3}$	$5.06 \cdot 10^{-3}$
$h_i/8$	$1.90 \cdot 10^{-2}$	$2.74 \cdot 10^{-3}$	$2.40 \cdot 10^{-3}$	$2.14 \cdot 10^{-3}$	$6.19 \cdot 10^{-4}$
$h_i/16$	$2.36 \cdot 10^{-3}$	$2.52 \cdot 10^{-3}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$4.62 \cdot 10^{-4}$	
$h_i/32$	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-4}$		

TABLE IV.1 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du maillage - Cas 2D(r,  $\theta$ ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

Ces résultats montrent que, comme pour le cas linéaire, la méthode de raffinement converge globalement en  $O(d_{h_{fin}})$  pour un comportement non linéaire. Ainsi, la solution composite obtenue avec la méthode LDC est dans la plupart des cas aussi précise que la solution mono-grille raffinée uniformément de même pas de maillage que le maillage le plus fin. On observe une légère dégradation de la correction lorsque des niveaux faibles d'erreur doivent être obtenus à partir d'un maillage assez grossier (par exemple  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 4$  ou  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2, 3, 4$  qui conduisent à une erreur 2 fois plus élevée que celle attendue). Or, si on compare la figure IV.4 et la figure III.9 p.79, on remarque que ce phénomène n'apparaissait pas en élasticité linéaire. Il semble donc que l'erreur de pollution soit plus importante dans le cas non linéaire que dans le cas linéaire, et donc que les zones détectées par le critère constant  $\alpha = 0.25$  ne soient pas suffisamment larges. L'erreur optimale pourrait être atteinte avec un critère de raffinement plus faible. Cependant, ces résultats sont tout à fait acceptables car le critère  $\alpha$  choisi ici est indépendant de la loi de comportement et de l'utilisateur.

La méthode LDC reste donc très intéressante, y compris dans un contexte non linéaire.

À titre illustratif, les déformations non linéaires (figure IV.5(a)) ont été comparées aux déformations totales (figure IV.5(b)), après convergence de la méthode LDC pour un maillage de pas  $h_0 = h_i/2$  avec  $l^* = 3$ . Nous pouvons voir que la partie non linéaire représente bien dans ce cas environ 90% des déformations totales de la structure, pour les CL de notre problème, comme cela était attendu par le choix d'une loi de comportement très fortement non linéaire. De plus, les déformations totales sont de l'ordre de 2 à 4%, ce qui est cohérent avec la figure IV.1.

#### IV.2.2 Performances de la méthode LDC par rapport au nombre de sous-niveaux

Nous nous sommes ensuite intéressés aux performances de la méthode LDC (temps CPU, nombre de nœuds) afin de trouver la stratégie optimale en termes de maillage de départ et de nombre de sous-niveaux pour atteindre une erreur voulue. Cette étude est à mettre en parallèle de celle faite à la section II.4 pour une loi de comportement linéaire.

Nous avons vu sur la figure IV.3 que les zones d'intérêt sont plus étendues dans le cas non linéaire que dans le cas linéaire. Nous avons donc tout d'abord tracé la norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du nombre de nœuds total sur l'ensemble des niveaux (voir figure IV.6).

En terme d'optimisation de l'espace mémoire, la stratégie de partir d'un maillage grossier et d'utiliser beaucoup de sous-niveaux semble optimale quelle que soit la loi de comportement. Cependant,

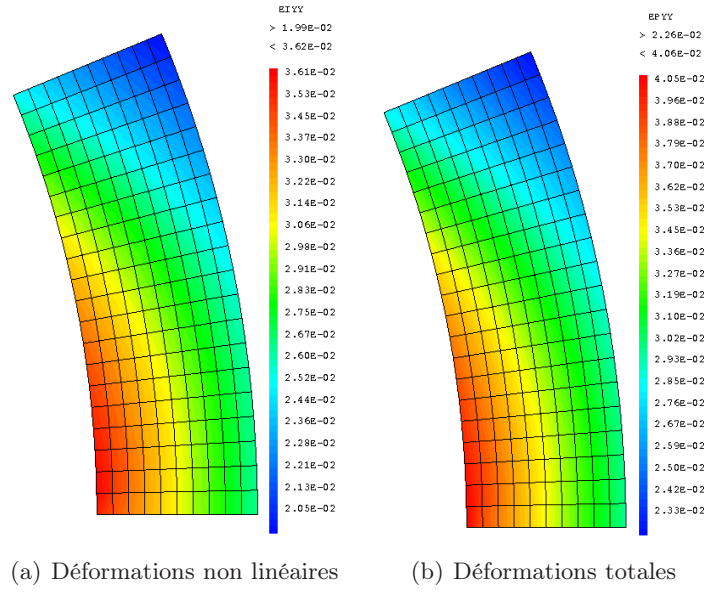


FIGURE IV.5 – Déformations non linéaires et totales - Composante orthoradiale - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité non linéaire -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

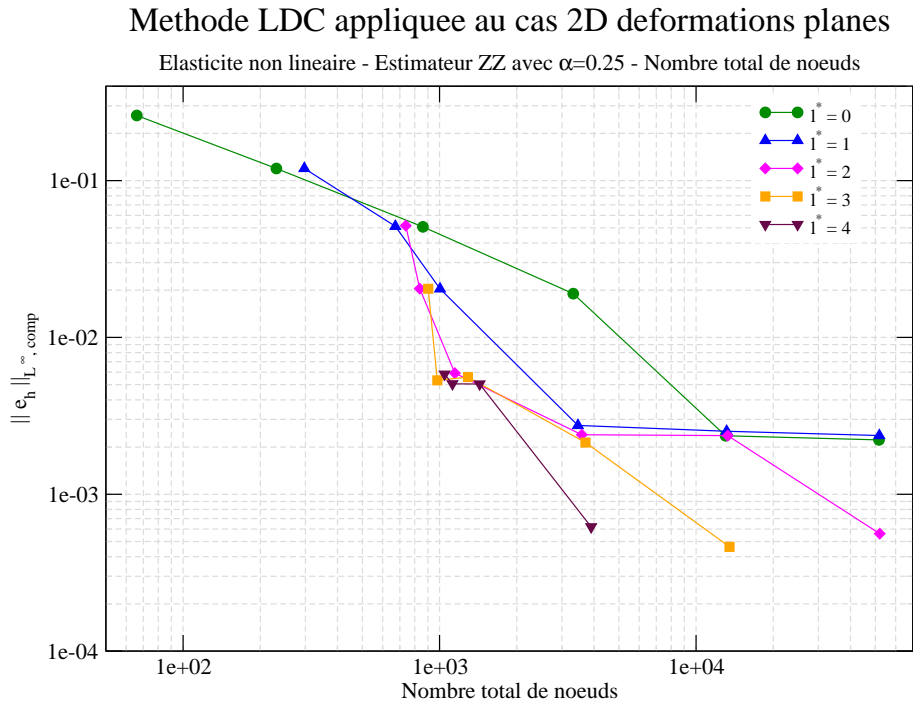


FIGURE IV.6 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du nombre total de nœuds - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$



pour des erreurs assez grossières on voit ici qu'il peut être plus intéressant d'utiliser un maillage plus fin et moins de sous-niveaux. Ainsi, pour une erreur de  $2 \cdot 10^{-2}$  (taille de maille locale de  $27 \mu\text{m}$ ), l'utilisation de 3 sous-niveaux à partir du maillage  $h_0 = h_i$  nécessite 12% de nœuds en plus qu'en partant de  $h_0 = h_i/2$  avec 2 sous-niveaux mais quand même 10% de nœuds en moins que le maillage  $h_0 = h_i/4$  et un seul sous-niveau et 72% de nœuds en moins que le maillage mono-grille  $h_0 = h_i/8$  de même taille de maille fine. Alors que pour une erreur de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4}$  (taille de maille locale de  $1.7 \mu\text{m}$ ), l'utilisation de 4 sous-niveaux permet de gagner 70% des nœuds nécessaires au calcul par rapport à l'utilisation de 3 sous-niveaux, et plus de 90% des nœuds par rapport à un calcul à 2 sous-niveaux.

Nous nous intéressons dans un deuxième temps aux temps de calcul. En effet, même si ceux-ci sont fortement corrélés au nombre de nœuds des différents maillages, ils dépendent également ici fortement du nombre de  $\wedge$ -cycles effectués car, comme spécifié dans la section IV.1.3, la loi de comportement doit être réévaluée à chaque itération de résolution non linéaire effectuée au cours des itérations de la méthode LDC, et ce de manière indépendante aux calculs précédents. Le temps de calcul ne se réduit donc plus à celui de la première étape de prolongement comme pour un comportement linéaire. La norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul est tracée sur la figure IV.7.

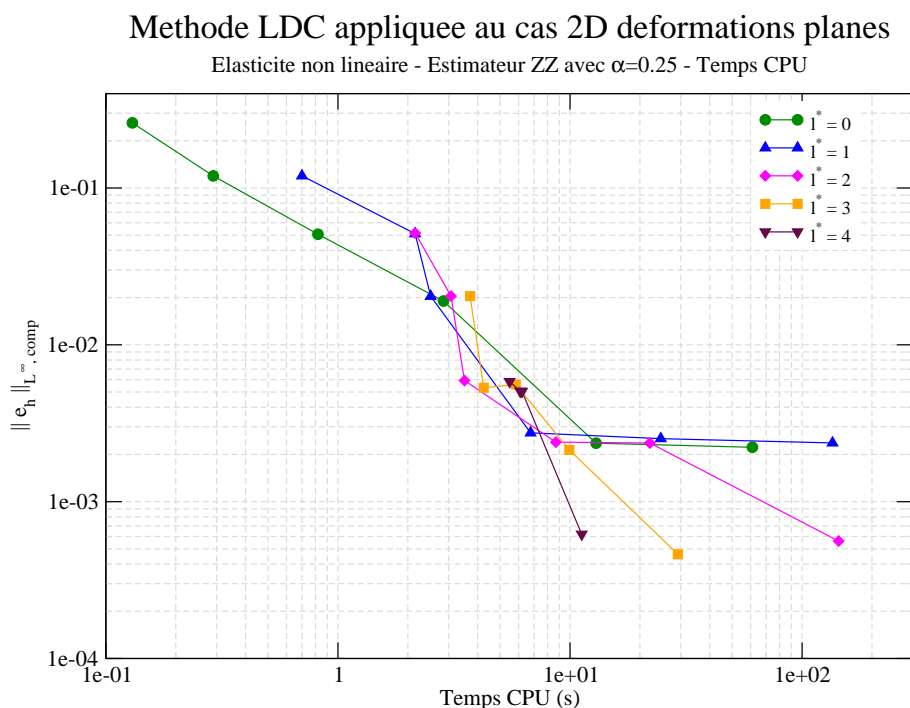


FIGURE IV.7 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

L'utilisation de la méthode LDC, et plus particulièrement de nombreux sous-niveaux au sein de celle-ci n'est intéressante dans un contexte non linéaire qu'à partir d'un niveau d'erreur avoisinant 1%. En effet, pour des niveaux d'erreur élevés (supérieurs à  $2 \cdot 10^{-2}$ ) et donc des mailles assez grossières (supérieures à  $27 \mu\text{m}$ ) l'intérêt de la méthode LDC n'est pas encore visible : dans ce cas un maillage mono-grille raffiné est plus optimal en terme de temps de calcul. Pour des erreurs

inférieures à  $2 \cdot 10^{-2}$ , qui sont usuellement recherchées, on voit la tendance de la courbe s'inverser et il devient de plus en plus intéressant d'utiliser la méthode LDC avec plusieurs sous-niveaux. L'intérêt du 4<sup>ème</sup> sous-niveau n'apparaît par exemple que pour des erreurs inférieures  $3 \cdot 10^{-3}$  (taille de maille locale de  $13.5 \mu\text{m}$ ). Pour des erreurs plus faibles, de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-4}$  (taille de maille locale de  $1.7 \mu\text{m}$ ), nous avons alors besoin de 2.8 fois moins de temps calcul avec un maillage tel que  $h_0 = h_i/8$  et  $l^* = 4$  qu'avec un maillage tel que  $h_0 = h_i/16$  et  $l^* = 3$ , et 12.2 fois moins qu'avec un maillage tel que  $h_0 = h_i/32$  et  $l^* = 2$ .

Malgré des différences moins marquées que dans le cas linéaire, l'intérêt d'utiliser la méthode LDC avec de nombreux sous-niveaux reste important en terme de nombre de nœuds. Le gain en temps de calcul devient intéressant pour des maillages dont les tailles de mailles sont de l'ordre de la dizaine de microns.

L'utilisation du rapport de raffinement  $r = 4$  pourrait alors s'avérer plus intéressant qu'en élasticité linéaire en terme de temps de calcul, puisque moins de problèmes doivent alors être résolus (cf. section III.2).

### IV.2.3 Comparaison à la méthode de raffinement h-adaptative globale

Comme dans la section III.4.2, nous voulons comparer ici la méthode LDC à la méthode de h-raffinement global conforme. Compte-tenu des résultats obtenus jusqu'ici, nous avons choisi de conserver les stratégies mises en place au chapitre III.4, à savoir partir d'un maillage grossier et utiliser de nombreux sous-niveaux pour la méthode LDC et utiliser un maillage raffiné *a priori* comme ceux utilisés au CEA pour la méthode de h-raffinement global. Un exemple de maillage utilisé pour la méthode LDC est visible sur la figure IV.3 et pour la méthode de h-raffinement sur la figure III.22(a) p.95. Cependant, étant donné l'influence de l'erreur de pollution sur le raffinement avec  $\alpha = 0.25$  pour la méthode LDC (cf. figure IV.4), nous avons considéré deux maillages de départ, de taille de maille initiale  $h_0 = h_i/2$  et  $h_0 = h_i/8$ . Les résultats de cette étude comparative sont résumés sur la figure IV.8 pour le temps CPU et la figure IV.9 pour le nombre de nœuds.

Si on compare la figure IV.8 à la figure III.23 p.96 obtenue pour le même type de comportement sur une loi d'élasticité linéaire, nous pouvons remarquer que la méthode LDC se retrouve plus pénalisée. En effet, le coût des  $\wedge$ -cycles est ici non négligeable et impacte fortement les performances de la méthode LDC.

Concernant les maillages dont la taille de maille initiale est  $h_i/2$ , la méthode LDC ne devient comparable au raffinement h-adaptatif global en terme de temps CPU que pour des niveaux d'erreur assez faibles (de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-3}$  ici, soit une taille de maille locale de  $1.7 \mu\text{m}$ ). Cependant, elle permet des économies en terme de nombre de nœuds, puisque pour une erreur de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-2}$  (taille de maille locale de  $27 \mu\text{m}$ ), la méthode LDC nécessite déjà 13% de nœuds en moins que la méthode de h-raffinement global, sans compter que les nœuds du maillage LDC sont répartis dans ce cas au sein de 3 niveaux de calculs. Pour une erreur beaucoup plus faible, de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-3}$ , la méthode LDC permet d'économiser plus de 50% des nœuds de maillage.

Si on s'intéresse à présent aux résultats de la méthode LDC avec  $h_0 = h_i/8$ , on remarque alors que la méthode LDC devient plus compétitive que la méthode de raffinement h-adaptatif global pour des erreurs faibles. Par exemple pour une erreur de  $6 \cdot 10^{-4}$  elle nécessite 50% de temps de calcul en moins et 80% de nœuds en moins par rapport au raffinement h-adaptatif global.

En conclusion, la méthode LDC devient très vite intéressante en terme de nombre de nœuds par rapport à une méthode de type h-raffinement global dans un contexte de mécanique non linéaire. Cet intérêt croît exponentiellement à mesure que la précision voulue ou la taille de maille souhaitée

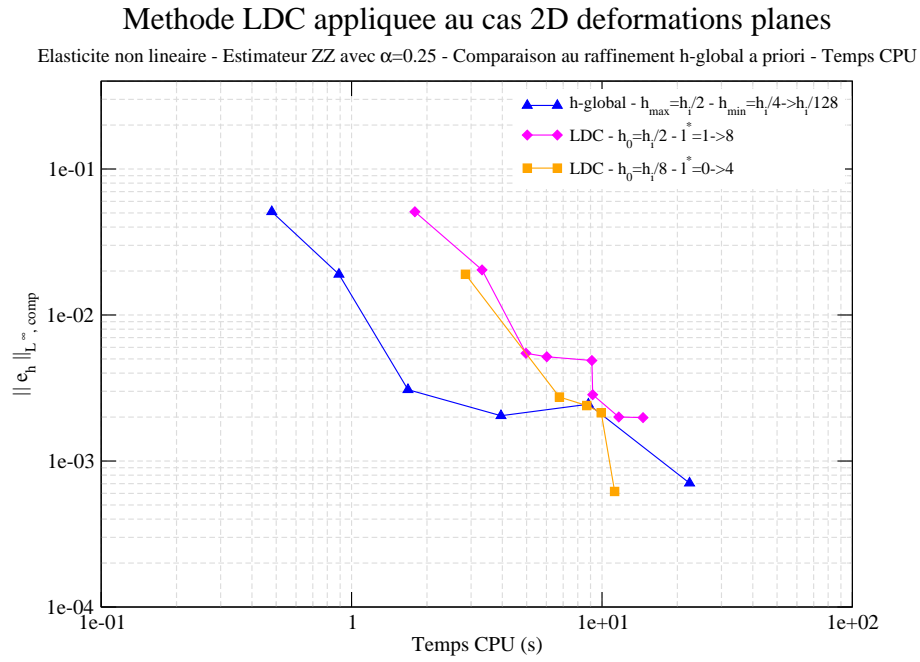


FIGURE IV.8 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Comparaison du raffinement h-adaptatif global *a priori* et de LDC

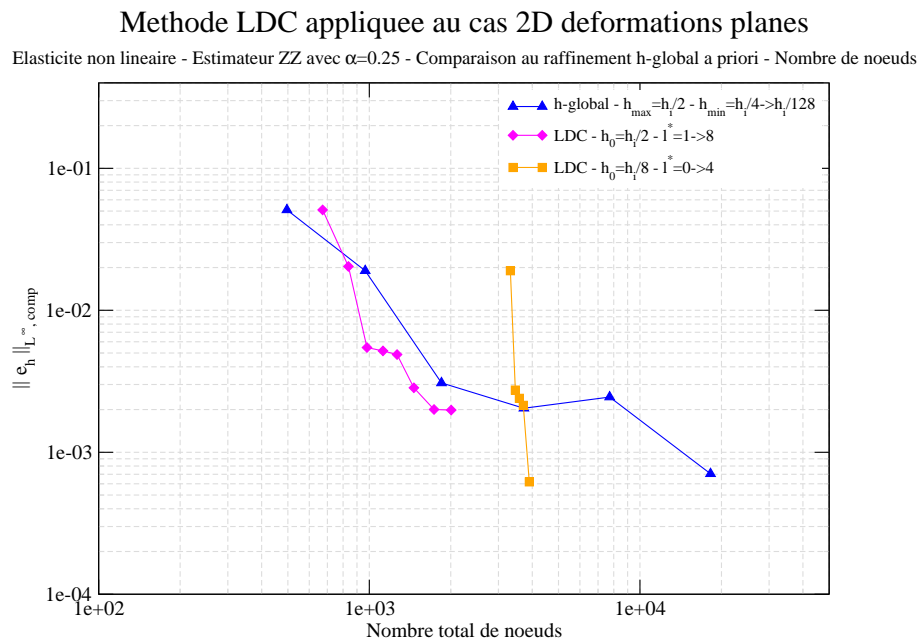


FIGURE IV.9 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction du nombre total de nœuds - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  - Comparaison du raffinement h-adaptatif global *a priori* et de LDC

est fine. Par contre, le coût des itérations de la méthode LDC, et plus particulièrement le coût lié à la réévaluation de la loi de comportement, implique que la méthode LDC devient moins compétitive en terme de temps de calcul. L'erreur de pollution, due à des zones raffinées pas assez étendues, aggrave encore ce phénomène. Une implémentation de l'intégration de la loi de comportement tenant compte d'estimations précédentes pourrait permettre à la méthode LDC d'être plus performante en terme de temps de calcul. La stratégie optimale en terme de temps de calcul dans le cas présent est d'utiliser la méthode LDC avec un maillage de départ plus raffiné.

## IV.3 Ajout d'une évolution temporelle

Nous nous intéressons à présent à un comportement non linéaire dépendant du temps. Ce type de comportement constitue l'essentiel des lois de comportement mécaniques. Le maillage est cette fois fixé *a priori* grâce à notre connaissance du phénomène étudié. Ceci a pour but de pouvoir décorrélérer l'impact du traitement de l'évolution temporelle de celui de la gestion d'un raffinement de maillage adaptatif (étudiée dans la section IV.4).

### IV.3.1 Caractéristiques du problème

#### IV.3.1.a Loi de comportement

La loi de comportement utilisée est une loi non linéaire à effet d'histoire, ce qui signifie que sa réponse à un temps donné dépend de l'historique de chargement. Des variables d'état sont définies afin de caractériser l'état du système.

La relation de comportement est la suivante :

$$\sigma = C : (\varepsilon - \varepsilon^{vp}) \quad (\text{IV.6})$$

avec

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{grad}(\mathbf{u}) + \text{grad}^T(\mathbf{u})) \quad (\text{IV.7})$$

Nous avons choisi pour cette étude une loi de fluage de Norton. Dans ce cas, la déformation non linéaire  $\varepsilon^{vp}$  est reliée à la contrainte par l'intermédiaire de sa vitesse, définie par :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \left(\frac{J}{K}\right)^{n-1} \sigma_d \quad (\text{IV.8})$$

avec

- $K$  et  $n$  deux coefficients donnés,
- $\sigma_d$  le tenseur déviatorique des contraintes

$$\sigma_d = \sigma - \frac{1}{D} \text{Tr}(\sigma) I_D \quad (\text{IV.9})$$

- où  $D$  est la dimension,  $I_D$  le tenseur unité et  $\text{Tr}(\sigma) = \sigma_{ii}$  représente la trace du tenseur  $\sigma$
- $J$  le second invariant de  $\sigma_d$  aussi appelé contrainte équivalente de Von Mises.

$$J = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}} \quad (\text{IV.10})$$

Cette loi est sans écrouissage. L'exposant  $n$  est ici choisi égal à 5, afin d'avoir un comportement non linéaire proche de celui de la loi de comportement de la gaine utilisée au CEA [Michel *et al.*, 2008a]. Le problème non linéaire dépendant du temps obtenu avec cette loi est résolu à l'aide d'un processus incrémental appliqué entre les temps  $t$  et  $t + \Delta t$ . L'incrément de la solution  $\Delta u$  est calculé à l'aide d'une méthode de type quasi-Newton (voir section IV.1.3).

### IV.3.1.b Chargement évolutif

Le cas test étudié est le modèle 2D déformations planes (cf. section I.2.2). La pression externe due au fluide caloporteur est constante et égale à 15.5 MPa. La pression interne due au contact avec la pastille est imposée de façon progressive, durant un chargement de 90 s. Le chargement est décomposé en 3 blocs (cf. figure IV.10). La pression varie linéairement en fonction du temps, mais la pente est différente dans chacun des blocs. Ce type de chargement permet de vérifier qu'un changement dans l'évolution du chargement n'implique pas de problème particulier dans l'algorithme de résolution.

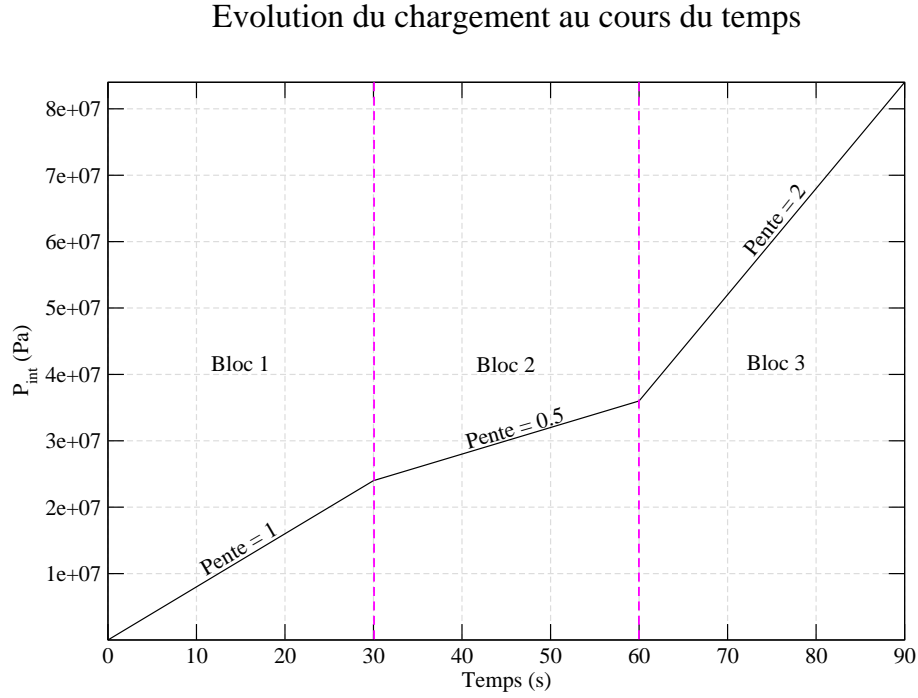


FIGURE IV.10 – Évolution de la pression interne au cours du temps - Chargement en 3 blocs

La solution de référence est calculée sur un maillage uniforme fin, de taille de maille  $2 \mu\text{m}$  dans chaque direction ( $\simeq 0.5$  millions de ddl). Le pas de temps choisi est aussi très fin, afin que la solution ait convergé en espace (taille de maille) et en temps (pas de temps). Pour notre référence, nous avons choisi un pas de temps constant égal à  $2.5 \cdot 10^{-3}$  s (40 000 pas de temps).

### IV.3.1.c Génération des sous-niveaux et conservation des conditions initiales

Dans cette partie de l'étude, nous voulons tester les performances de la méthode LDC sur une loi de comportement non linéaire avec effet d'histoire. Comme précisé en introduction, nous avons décidé d'utiliser des maillages définis *a priori* et indépendants du temps afin de ne pas avoir à gérer en premier lieu de modification dynamique du maillage. Ainsi, les informations sont conservées sur tous les niveaux de grilles afin d'initialiser le calcul du pas suivant (solution initiale, variables internes initiales).

Compte-tenu de l'étude non linéaire effectuée précédemment et afin d'optimiser le ratio précision/coût de calcul, nous définissons la zone à raffiner comme un carré de  $6 \times 6$  éléments englobant l'élément contenant la singularité. Un exemple de maillage obtenu pour  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$  est

tracé sur la figure IV.11. Comme précédemment,  $h_i = 218 \mu\text{m}$ .

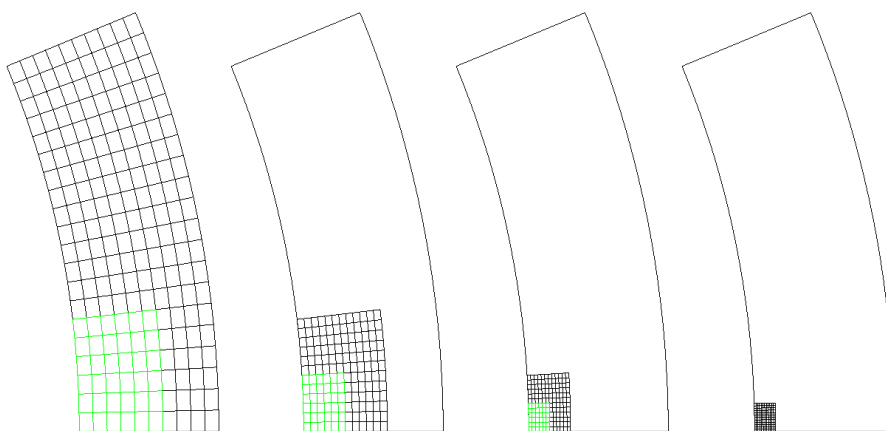


FIGURE IV.11 – Exemple de maillages imbriqués - Zones d'intérêt définies *a priori* (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - Chargement en 3 blocs -  $h_0 = h_i/2$  et  $l^* = 3$

### IV.3.2 Vérification de la méthode LDC pour un problème non linéaire à effet d'histoire

Pour cette première vérification, nous choisissons d'utiliser le même pas de temps pour le calcul LDC que pour le calcul de référence, soit  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$  s, quel que soit le niveau de raffinement. Ainsi, nous nous ramenons ici à l'étude d'un problème matériel non linéaire à chaque pas de temps. La principale différence par rapport au cas de vérification précédent (élasticité non linéaire) est l'intégration temporelle de la loi de comportement. En effet, nous avons vérifié précédemment que le calcul d'un seul pas de temps non linéaire conduisait bien à la convergence de la méthode LDC en  $O(d_{h_{fin}})$ . Le but de cette nouvelle étude est de vérifier que la solution obtenue ne dégénère pas au cours du temps quand la loi de comportement dépend de l'historique. Ici, un schéma d'intégration de type Euler implicite est utilisé.

Nous avons pour cela tracé la norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur obtenue à la fin de chaque bloc de chargement, sur les figures IV.12, IV.13 et IV.14 respectivement.

La première conclusion que nous pouvons tirer de ces courbes est que l'erreur relative est du même ordre de grandeur pour les trois blocs de chargement.

D'autre part, nous pouvons observer que le pas de temps utilisé est suffisamment fin, puisque les maillages mono-grilles uniformément raffinés convergent à l'ordre 1, qui est l'ordre attendu concernant la convergence en maillage. L'erreur de discrétisation temporelle est donc négligeable par rapport à l'erreur de discrétisation spatiale.

Pour finir, la méthode LDC est toujours précise, y compris pour un comportement non linéaire à effet d'histoire. En effet, les mêmes niveaux d'erreur sont obtenus avec un maillage LDC qu'avec un maillage mono-grille uniformément raffiné, pour une même taille de maille fine. La méthode converge donc toujours en  $O(d_{h_{fin}})$ . L'erreur commise par la méthode LDC ne semble pas se cumuler même si on observe une légère dégradation de la correction à la fin du bloc 3 pour les niveaux d'erreur les plus

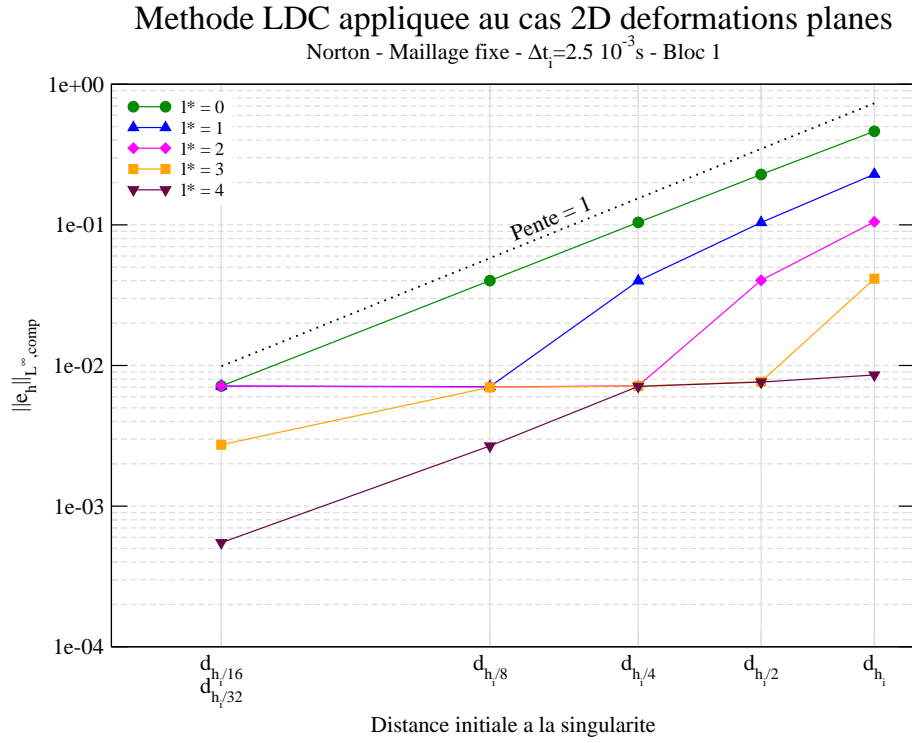


FIGURE IV.12 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - Maillage *a priori* -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$  s - Fin du bloc 1

fins obtenus. Cette dégradation reste assez faible et semble plutôt s'expliquer par le choix *a priori* du maillage. En effet, si nous observons les maillages de la figure IV.3 obtenus avec l'estimateur ZZ et  $\alpha = 0.25$  sur un maillage de taille  $h_0 = h_i/2$  pour un comportement élastique non linéaire, nous pouvons remarquer que le premier niveau de raffinement était plus large que celui choisi *a priori* ici (voir la figure IV.11). De plus, dans ce cas une erreur de pollution était déjà présente pour les maillages initiaux les plus grossiers (cf. figure IV.4). La dégradation de la correction que l'on observe ici est donc certainement aussi due au choix *a priori* du maillage et par conséquent à l'erreur de pollution.

Par ailleurs, avec la méthodologie LDC, nous pouvons réaliser sans difficulté des calculs sur des maillages dont la taille de maille est inférieure au micron (les résultats présentés ici s'arrêtent à  $0.85 \mu\text{m}$ , car la référence n'est alors plus assez fine pour être représentative), alors qu'il est impossible de réaliser le même calcul sur un maillage mono-grille aussi fin, sur le même ordinateur. En conclusion, lorsque les niveaux de raffinement sont fixes au cours du temps et que l'erreur de discrétisation temporelle est suffisamment faible, la méthode LDC conserve l'ordre de convergence optimal en fonction du pas local du maillage. Cependant, la définition *a priori* de la zone de raffinement conduit à atteindre assez vite l'erreur de pollution.

### IV.3.3 Raffinement espace/temps

Nous avons vérifié dans la section précédente que le raffinement spatial proposé était efficace même lorsqu'une intégration en temps de la loi de comportement était réalisée. Cependant, dans cette étude, un pas de temps fixe très fin a été choisi pour tous les calculs afin de négliger l'erreur de discrétisation temporelle. Dans l'optique d'optimiser notre méthode en temps de calcul, nous



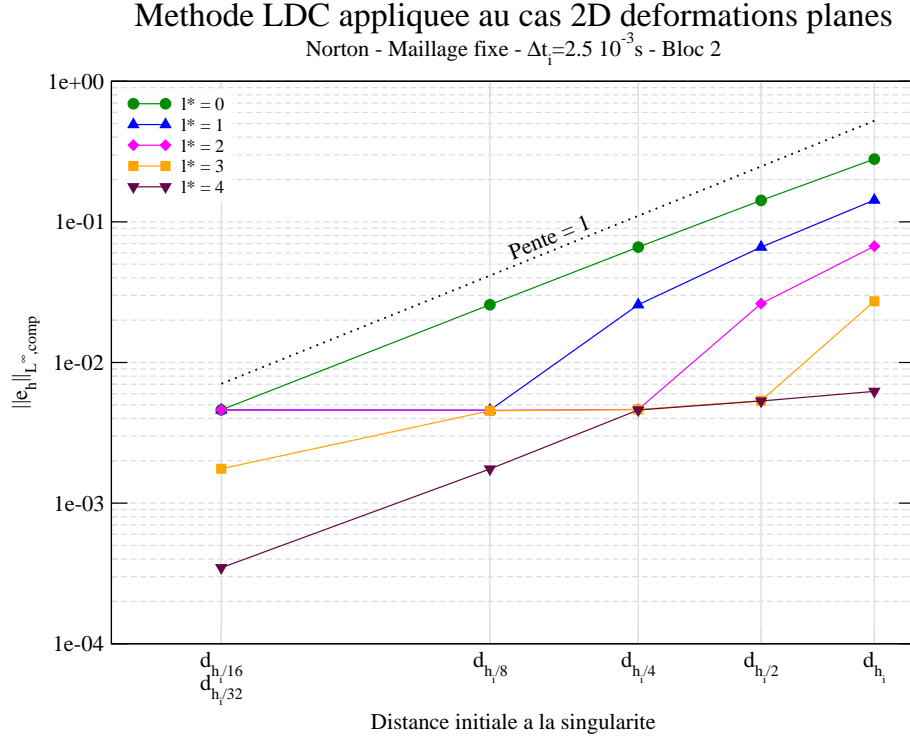


FIGURE IV.13 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - Maillage *a priori* -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$  s - Fin du bloc 2

voulons à présent adapter le pas de temps en fonction du pas d'espace.

#### IV.3.3.a Convergence en pas de temps de la méthode de résolution

Tout d'abord, nous étudions la convergence en fonction du pas de temps de l'algorithme de résolution non linéaire choisi. Nous rappelons que l'intégration de la loi de comportement a été effectuée à l'aide d'une méthode d'Euler implicite, qui est d'ordre 1 en temps. Nous effectuons donc seulement des calculs mono-grilles. Cette fois-ci, le pas d'espace est choisi très fin (taille de maille  $4 \mu\text{m}$  dans chaque direction) pour négliger l'erreur de discrétisation spatiale et le pas de temps va varier de 10 à  $2.5 \cdot 10^{-3}$  s. La norme  $L^\infty$  absolue composite de l'erreur (i.e.  $\|u_h - u_{ref}\|_{L^\infty, comp}$ ) à la fin de chaque bloc de chargement est tracée en fonction du pas de temps sur la figure IV.15.

Nous pouvons voir que l'algorithme de résolution non linéaire combiné à la  $\theta$ -méthode converge à l'ordre 1, et ce pour les 3 blocs de chargement. La convergence asymptotique est cependant plus lente à atteindre pour le troisième bloc de chargement et nécessite des pas de temps fins (de l'ordre de 0.1 s).

De plus, nous observons que l'erreur absolue se cumule au cours du temps. Cependant, étant donné que les déplacements sont de plus en plus grands, les erreurs relatives seront bien du même ordre de grandeur, comme déjà remarqué sur les figures précédentes.

#### IV.3.3.b Influence du pas de temps sur la méthode LDC

Le but de cette étude est de trouver le pas de temps maximal permettant de conserver l'ordre de convergence en maillage avec le raffinement LDC.

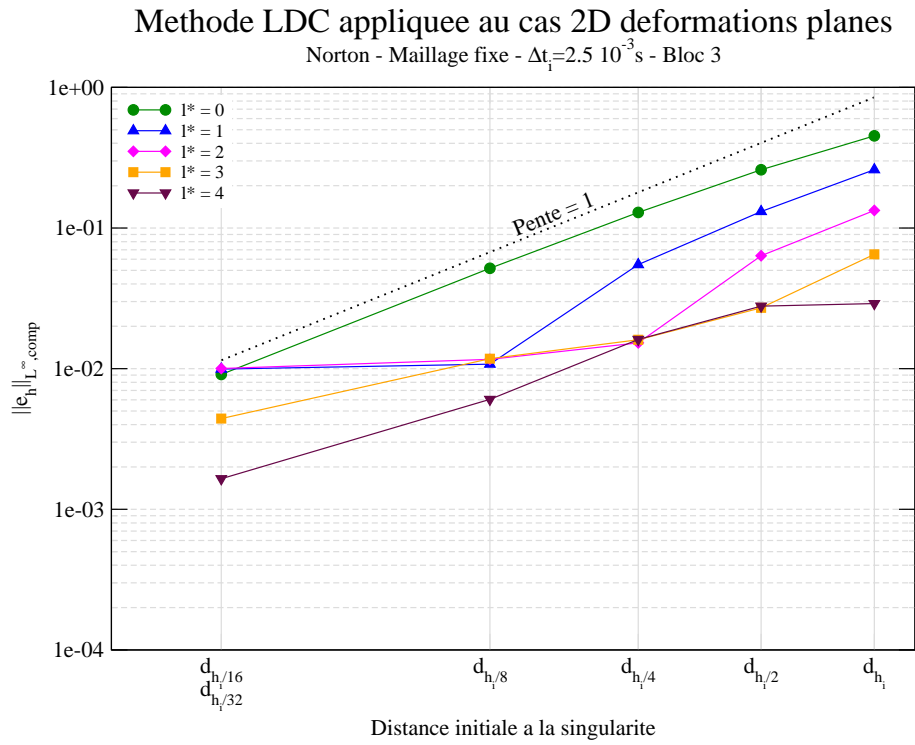


FIGURE IV.14 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l’erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - Maillage *a priori* -  $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$  s - Fin du bloc 3

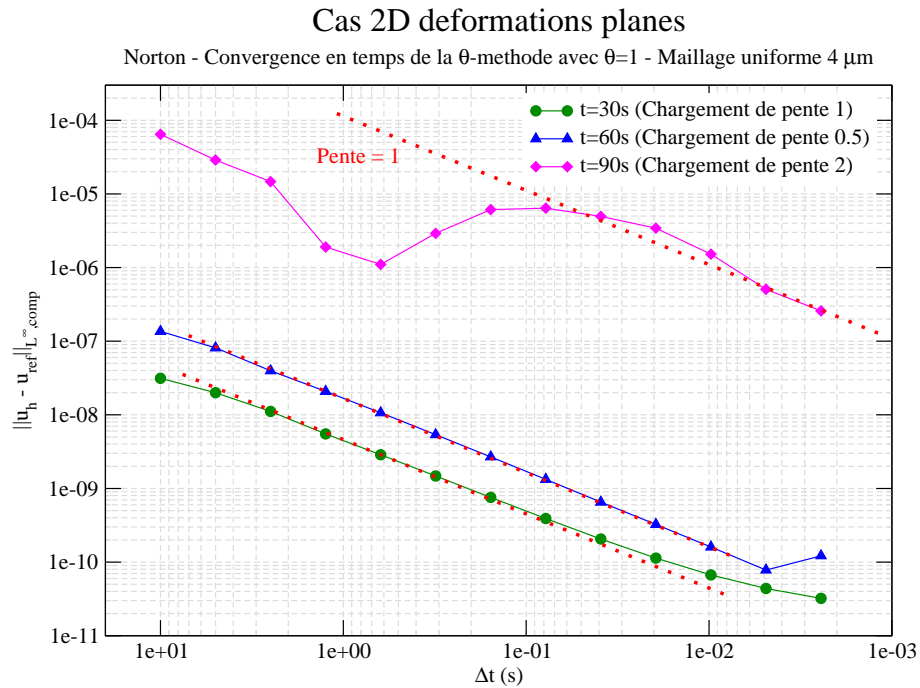


FIGURE IV.15 – Convergence de la  $\theta$ -méthode,  $\theta = 1$  (Euler implicite), en fonction du pas de temps - Maillage mono-grille  $4 \mu\text{m}$  - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton

Pour cela, nous traçons la norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur obtenue à la fin de chaque bloc de chargement, en fonction de la distance initiale à la singularité, pour des pas de temps constants variant de  $\Delta t = 10$  s à  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$  s. Les résultats sont disponibles sur les figures IV.16 et IV.17.

Pour les pas de temps les plus grossiers, la convergence en espace des maillages mono-grilles raffinés uniformément n'est pas retrouvée pour les niveaux d'erreurs les plus fins. Pour des erreurs de  $1 \cdot 10^{-2}$ , la convergence en maillage est atteinte pour  $\Delta t_0 = 1$  s pour le bloc 1 et pour  $\Delta t_0 = 0.1$  s pour le bloc 2 alors qu'elle n'est pas encore atteinte à  $\Delta t_0 = 0.01$  s pour le bloc 3. Ces résultats sont cohérents avec ceux de la figure IV.15. Le lien entre pas de temps et pas d'espace semble donc déjà dépendre du chargement considéré en plus du niveau d'erreur attendu.

Par ailleurs, quel que soit le pas de temps, la méthode LDC permet généralement d'obtenir une erreur similaire à celle d'un maillage mono-grille raffiné uniformément de même taille de maille la plus fine. Ainsi, l'algorithme de raffinement LDC reste très performant même lorsque l'erreur de discrétisation temporelle intervient. La convergence optimale en maillage est retrouvée dès que le pas de temps diminue. Pour chaque bloc, il semble exister une corrélation entre pas d'espace et pas de temps permettant de négliger l'erreur de discrétisation temporelle et de retrouver la convergence optimale de la méthode de raffinement spatial.

#### IV.3.3.c Relation locale entre pas d'espace et pas de temps

Compte-tenu des résultats précédents, nous avons choisi d'essayer de conserver une relation pas d'espace/pas de temps lors du raffinement LDC, comme proposé dans [Berger et Olinger, 1984, Berger et Colella, 1989], dans un autre contexte physique. Ainsi, le même rapport de raffinement doit être utilisé en espace et en temps :

$$\frac{h_{l-1}}{h_l} = \frac{\Delta t_{l-1}}{\Delta t_l} = r_l = r \quad (\text{IV.11})$$

Dans la littérature, la résolution multi-grille locale avec raffinement espace/temps s'accompagne d'une résolution sous forme de  $M$ -cycle (voir figure IV.18(a)) [Berger et Colella, 1989, Borrel *et al.*, 2006] afin de corriger la solution sur les pas de temps intermédiaires des niveaux fins. Cependant, l'algorithme de raffinement spatial LDC utilisé dans cette thèse est résolu à l'aide de  $\Lambda$ -cycles. Nous avons donc choisi d'adapter la procédure de raffinement espace/temps aux  $\Lambda$ -cycles (voir figure IV.18(b)). Ainsi, sur chaque niveau, plusieurs pas de temps fins successifs seront réalisés afin de parcourir l'équivalent du pas de temps grossier.

Dans le cas du  $M$ -cycle temporel, durant un pas de temps grossier, chaque sous-pas de temps d'un niveau intermédiaire est corrigé par le niveau immédiatement plus fin avant d'effectuer le sous-pas de temps suivant. Les niveaux plus fins bénéficient ainsi des conditions aux limites intermédiaires corrigées.

Au contraire, dans le cas du  $\Lambda$ -cycle temporel, chaque niveau résout successivement tous ses sous-pas de temps (correspondant à un pas de temps grossier) sans correction intermédiaire. La correction du calcul n'a donc lieu qu'à la fin de chaque pas de temps grossier, quel que soit le niveau de calcul considéré.

Une étude complémentaire à l'étude précédente a permis de déterminer des pas de temps initiaux pour les maillages mono-grilles. Ainsi, pour  $h_0 = h_i = 218 \mu\text{m}$ , on a  $\Delta t_{i,1} = \Delta t_{i,2} = 0.8$  s et  $\Delta t_{i,3} = 0.02$  s. Les calculs sur des maillages tels que  $h_0 = h_i/n$  doivent alors utiliser un pas de

## Methode LDC appliquee au cas 2D deformations planes

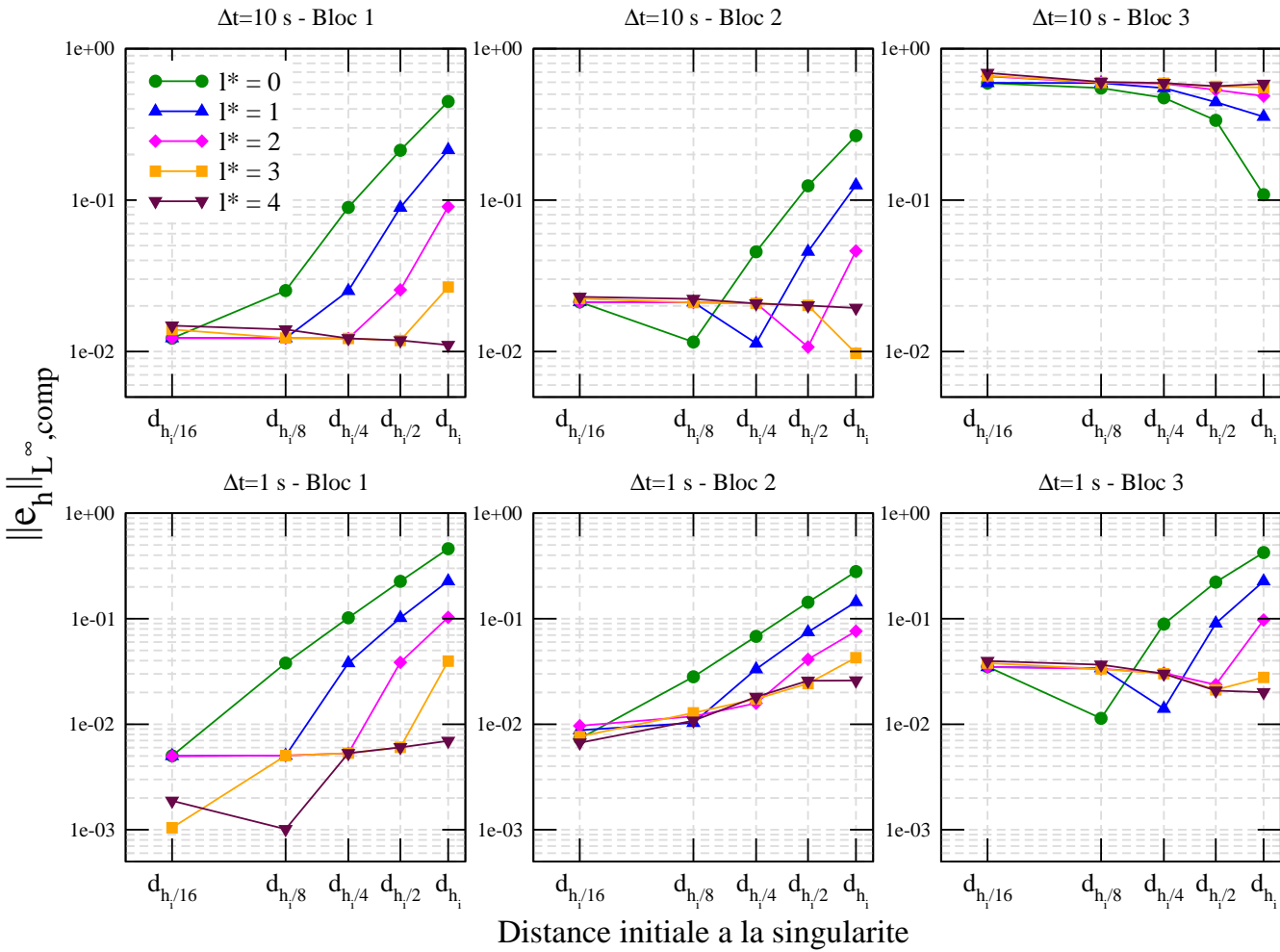


FIGURE IV.16 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité et du bloc de chargement - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton -  $\Delta t = 10$  s et  $\Delta t = 1$  s

## Methode LDC appliquee au cas 2D deformations planes

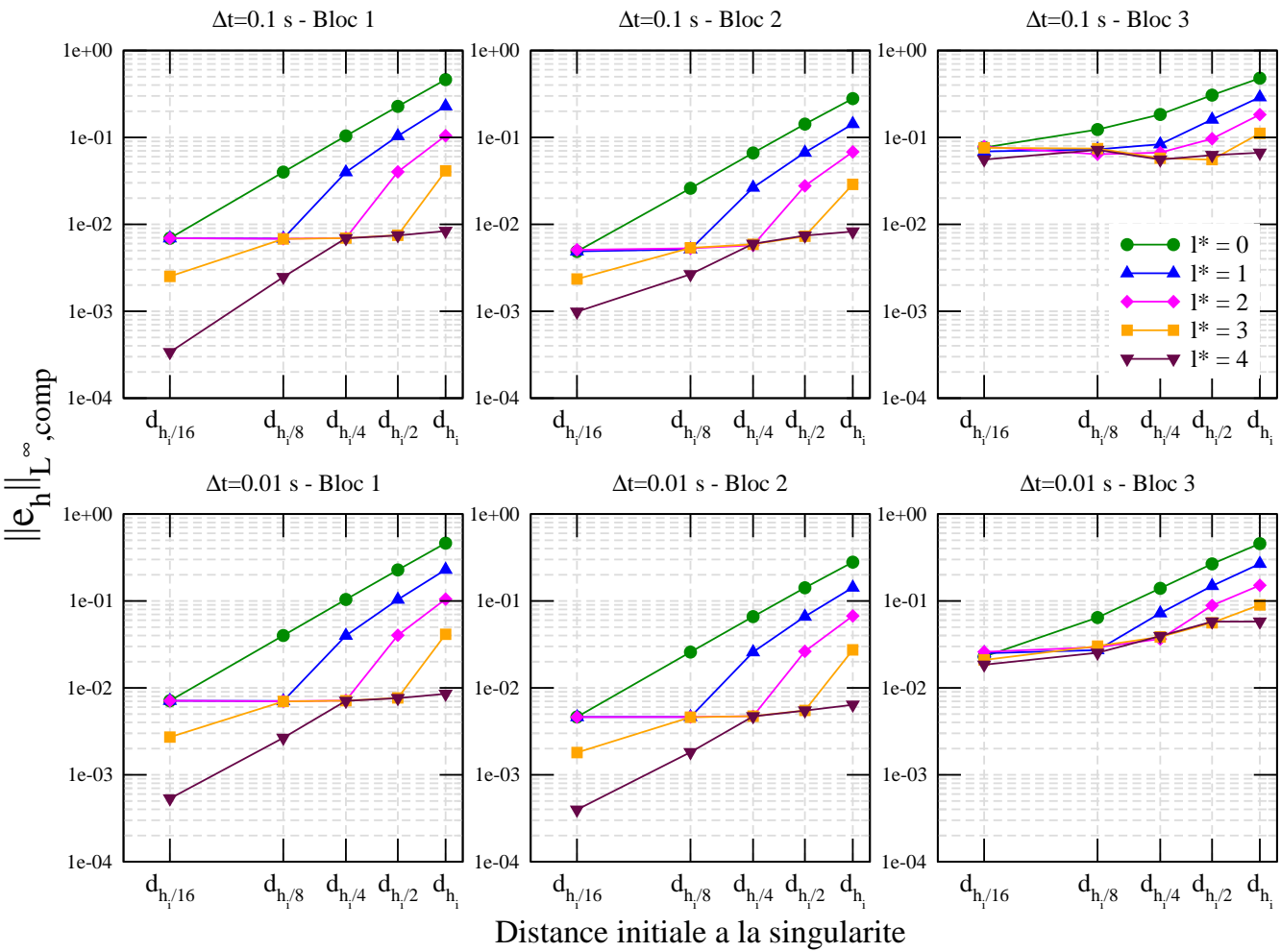
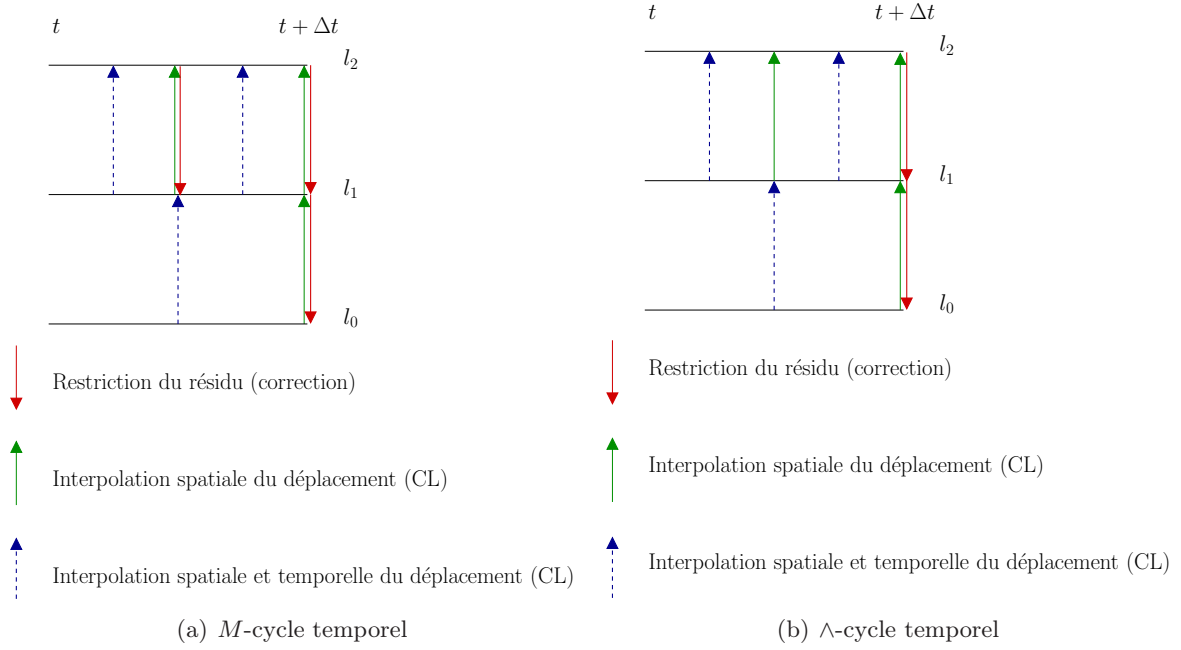


FIGURE IV.17 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité et du bloc de chargement - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton -  $\Delta t = 0.1$  s et  $\Delta t = 1.10^{-2}$  s

FIGURE IV.18 – Schémas de résolution temporels -  $M$ -cycle et  $\Lambda$ -cycle pour  $r = 2$ 

temps  $\Delta t_0 = \Delta t_i/n$ . Dans le cadre du raffinement spatio-temporel, nous allons comparer l'erreur obtenue sur un maillage mono-grille à celle obtenue avec la méthode LDC où la grille locale a les mêmes pas d'espace et de temps. Les résultats pour la norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur à la fin du chargement complet sont tracés sur les figures IV.19, IV.20 et IV.21.

Les maillages mono-grilles des deux premiers blocs conservent l'ordre de convergence optimal par rapport au pas du maillage, ce qui valide les valeurs choisies pour  $\Delta t_i$ . Cependant, sur le dernier bloc la convergence optimale n'est pas encore atteinte.

Pour le premier bloc de chargement, le pas de temps initial choisi est déjà fin. Hormis pour le maillage le plus grossier, la convergence optimale en fonction du pas de temps local est alors obtenue. Ce résultat nous permet de vérifier que si l'erreur de discrétisation temporelle sur le maillage initial est inférieure à l'erreur de discrétisation spatiale du maillage fin local, il n'y a pas de problème dû à l'interpolation spatio-temporelle.

Pour le deuxième et le troisième bloc de chargement, les résultats obtenus ne sont plus optimaux. Cette dégradation semble être en partie due au fait d'avoir effectué une résolution en  $\Lambda$ -cycle temporel plutôt que  $M$ -cycle temporel. En effet, on observe que la correction se détériore à mesure que plus de sous-niveaux sont générés. Cependant, cette dégradation a également lieu lorsqu'un seul niveau est généré (particulièrement pour le bloc 3), pour lequel  $M$ -cycles et  $\Lambda$ -cycles sont équivalents. La perte de correction peut donc être également due au fait que le raffinement temporel n'a été réalisé que localement, et serait nécessaire sur d'autres parties du maillage.

Cependant, cette méthode peut offrir un bon compromis erreur/temps, car l'ajout de sous-niveaux continue à corriger la solution.

Nous avons alors comparé l'erreur et le temps CPU du calcul complet pour quelques maillages, selon si un raffinement local spatio-temporel est réalisé ou si le pas de temps du maillage le plus fin est utilisé sur tous les niveaux. Les résultats de cette comparaison sont rassemblés dans le tableau IV.2.

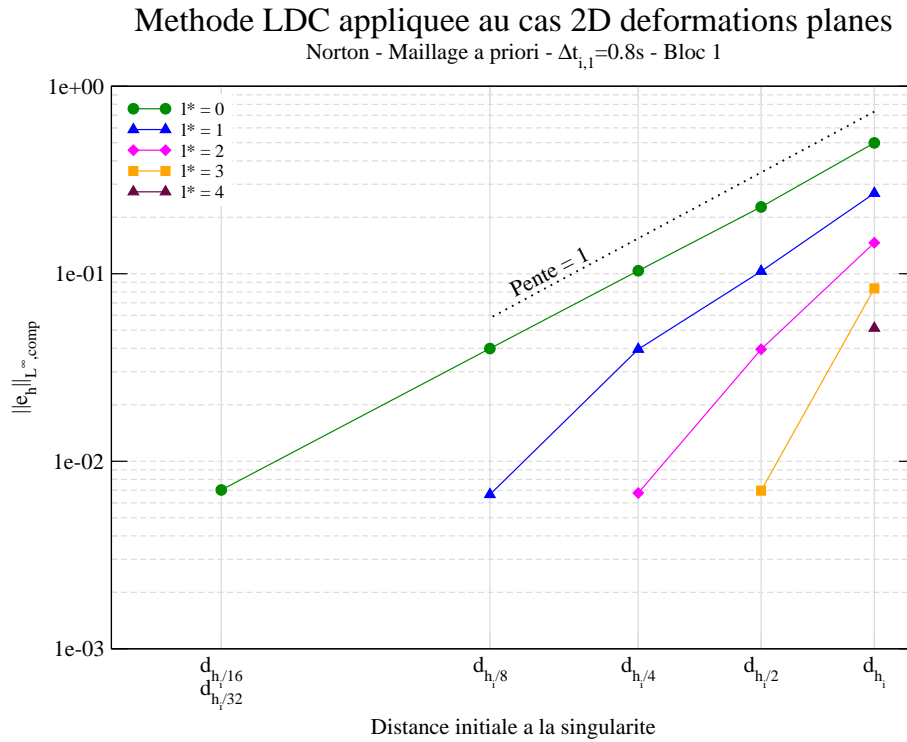


FIGURE IV.19 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Fluage de Norton -  $\Delta t_{i,1} = 0.8$  s et raffinement espace-temps - Fin du bloc 1

Performances de la méthode LDC en fonction du raffinement temporel (Sans raffinement : $\ e_{h_i}\ _{L^\infty, comp} = 5.05 \cdot 10^{-1}$ $\ e_{h_i/2}\ _{L^\infty, comp} = 2.60 \cdot 10^{-1}$ , $\ e_{h_i/4}\ _{L^\infty, comp} = 1.33 \cdot 10^{-1}$ )				
$\Delta t_l$ $h_0 - l^*$	$\Delta t_l = \Delta t_{l^*} = \Delta t_0/2^{l^*}$		$\Delta t_l = \Delta t_0/2^l$	
	$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	Temps	$\ e_h\ _{L^\infty, comp}$	Temps
$h_i - 1$ ( $h_{l^*} = 1.1 \cdot 10^{-4}$ m)	$2.38 \cdot 10^{-1}$	$4.4 \cdot 10^3$ s	$3.38 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^3$ s
$h_i - 2$ ( $h_{l^*} = 5.5 \cdot 10^{-5}$ m)	$1.40 \cdot 10^{-1}$	$2.6 \cdot 10^4$ s	$2.33 \cdot 10^{-1}$	$6.3 \cdot 10^3$ s
$h_i - 4$ ( $h_{l^*} = 1.4 \cdot 10^{-5}$ m)	$1.88 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^5$ s	$1.50 \cdot 10^{-1}$	$1.9 \cdot 10^4$ s
$h_i/4 - 2$ ( $h_{l^*} = 1.4 \cdot 10^{-5}$ m)	$6.23 \cdot 10^{-3}$	$8.5 \cdot 10^4$ s	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^4$ s

TABLE IV.2 – Performances de la méthode LDC en fonction du raffinement temporel - Fluage de Norton - Cas 2D(r,θ)

La première conclusion à tirer de ce tableau est que la correction dans le cas du raffinement spatio-temporel n'est pas optimale puisque la solution est dégradée par rapport à l'utilisation du même pas de temps fin pour tous les niveaux. Ainsi, la correction n'est que de 54% avec  $h_0 = h_i$  et

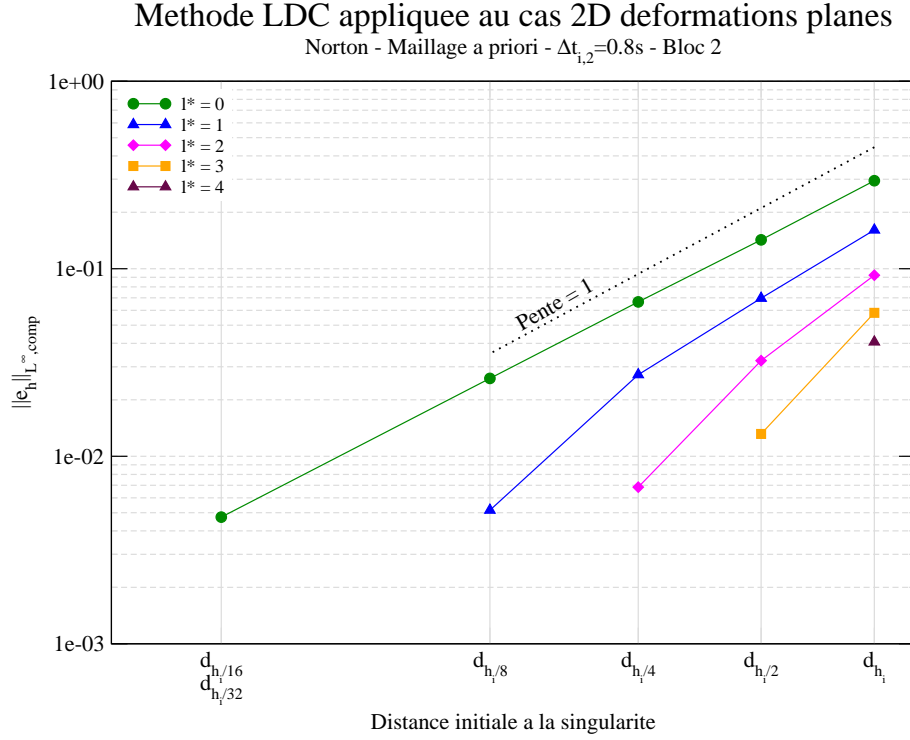


FIGURE IV.20 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton -  $\Delta t_{i,2} = 0.8$  s et raffinement espace-temps - Fin du bloc 2

$l^* = 2$  dans le cas d'un raffinement spatio-temporel au lieu de 72% (correction optimale) avec un raffinement spatial avec utilisation d'un pas de temps fin partout. En partant d'un maillage plus fin, le problème reste présent puisque pour  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2$  l'erreur est 4 fois plus grande pour le raffinement spatio-temporel. Cette dégradation ne semble pas totalement due au fait d'avoir choisi de faire des  $\wedge$ -cycles temporels plutôt que des  $M$ -cycles, puisqu'elle est déjà présente dans le cas d'un seul sous-niveau, pour lequel les  $\wedge$ -cycles et  $M$ -cycles sont équivalents. En effet, pour  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 1$ , la correction n'est que de 33% avec un raffinement spatio-temporel au lieu de 53% (qui est la correction optimale) avec un pas de temps fin sur tous les niveaux. À notre connaissance, seul [Minero *et al.*, 2006] compare la solution MGL avec raffinement spatio-temporel à la solution mono-grille avec les mêmes pas de temps et d'espace fins, ce qui est la solution optimale. Dans ce cas, la méthode LDC est appliquée aux équations de convection-diffusion et un seul sous-niveau de raffinement est généré, mais les erreurs obtenues sont optimales. Comme le cas multi-niveaux n'est pas traité, cette étude ne permet pas de trancher le problème des  $M$ -cycles. Néanmoins, dans notre cas, il semble qu'un raffinement uniquement local en temps ne soit pas suffisant ou qu'un terme de correction supplémentaire doive être pris en compte, en particulier à cause du traitement de la loi de comportement.

On regarde à présent le ratio précision/temps, qui est un critère majeur pour apprécier l'intérêt du raffinement spatio-temporel. Ainsi, pour des maillages grossiers le raffinement spatio-temporel peut sembler intéressant : pour le maillage  $h_0 = h_i$  et  $l^* = 2$ , le temps de calcul avec le raffinement spatio-temporel est 4 fois plus petit alors que l'erreur n'est que 1.6 fois plus grande. Mais pour le maillage  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2$  la tendance s'inverse puisque le temps de calcul n'est que 2.4 fois plus petit alors que l'erreur est 3.6 fois plus grande. Par ailleurs, pour atteindre une erreur de  $2.3 \cdot 10^{-1}$



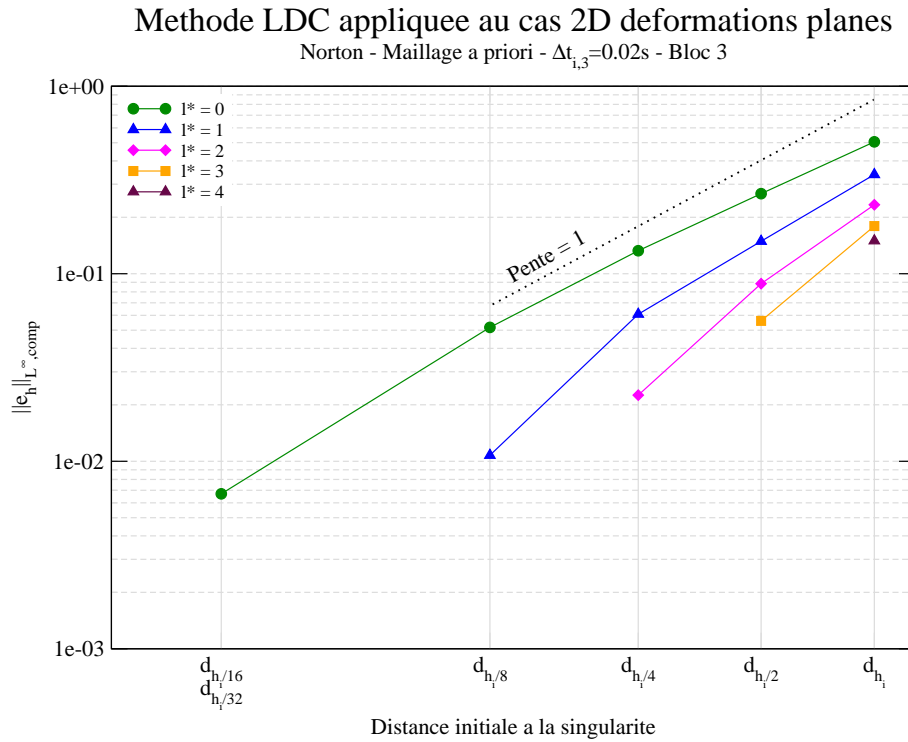


FIGURE IV.21 – Norme  $L^\infty$  relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,  $\theta$ ) - Fluage de Norton -  $\Delta t_{i,3} = 2 \cdot 10^{-2}$  s et raffinement espace-temps - Fin du bloc 3

à partir d'un maillage de taille  $h_0 = h_i$ , le raffinement spatio-temporel a besoin de 2 sous-niveaux alors que le raffinement spatial avec pas de temps fin atteint cette erreur avec 1 sous-niveau et donc un temps de calcul 33% moins important.

#### IV.3.3.d Conclusion

La méthode LDC reste performante quand l'erreur de discrétisation temporelle est négligeable devant l'erreur de discrétisation spatiale du maillage le plus fin. Une valeur optimale du pas de temps peut donc être trouvée qui est cohérente avec le pas d'espace fin.

Un raffinement spatio-temporel a été testé afin d'augmenter le gain en temps de calcul de la méthode LDC. Cependant, il semble qu'un raffinement local en temps calqué sur le raffinement local en espace ne soit pas suffisant ou qu'un terme de correction supplémentaire lors de l'étape de restriction soit à intégrer dans l'algorithme LDC. L'algorithme de raffinement spatio-temporel doit donc être amélioré pour traiter des lois de comportement générales afin que ce dernier puisse s'avérer intéressant pour un contexte industriel.

Dans la suite de l'étude, nous utiliserons donc un pas de temps fin homogène cohérent avec le pas du maillage le plus fin afin d'éviter la dégradation de la correction. Le gain en temps de calcul sera alors uniquement dû au raffinement spatial, comme dans le cas d'une loi de comportement non linéaire sans effet d'histoire, pour lequel un gain en temps de calcul a été obtenu dans la section précédente.

## IV.4 Modification dynamique du maillage

Pour terminer notre étude, nous envisageons d'adapter de façon dynamique le maillage, c'est-à-dire d'utiliser à chaque pas de temps de nouvelles sous-grilles générées à partir de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ. L'intérêt ici est que le maillage suive l'évolution du problème traité au cours du temps.

Les études précédentes ont permis de vérifier les performances de la méthode LDC pour des problèmes quasi-statiques avec une loi de comportement non linéaire à effet d'histoire pour des maillages fixes. Il nous reste donc à définir comment transmettre de façon optimale les informations d'un maillage composite à un temps donné vers un autre maillage composite au pas de temps suivant.

### IV.4.1 Projection des conditions initiales

Nous ne nous intéressons ici qu'aux champs qui doivent être projetés pour définir les CI du calcul sur les sous-niveaux.

Nous avons choisi d'adopter une stratégie similaire à celle de Biotteau dans sa thèse [Biotteau, 2010]. Pour un pas de temps et un niveau de raffinement donnés, les informations provenant du même niveau de raffinement sont utilisées si elles sont disponibles pour le maillage considéré. Sinon les informations du niveau grossier le plus raffiné disponible sur la grille considérée sont utilisées. Aucun niveau plus fin que le niveau considéré n'est utilisé. La figure IV.22 illustre ce choix pour un maillage 1D avec deux sous-niveaux.

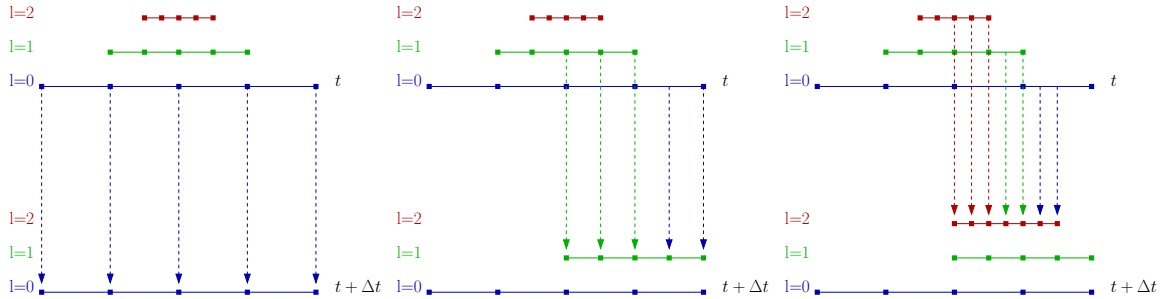


FIGURE IV.22 – Transmission des informations entre niveaux entre deux pas de temps - Maillages imbriqués

#### IV.4.1.a Gestion des champs définis aux nœuds

Concernant les champs définis aux nœuds, deux cas sont à traiter séparément : les champs vérifiant une condition conservative et les autres.

Pour les champs ne vérifiant aucune condition conservative (les déplacements par exemple), la projection s'effectue à l'aide des fonctions de forme du maillage à partir duquel on projette. Ainsi, sur tous les nœuds communs géométriquement, les valeurs sont directement conservées.

Pour les champs dont la somme doit être conservée (les efforts par exemple), une interpolation vérifiant la conservation du champ par patch (ici l'élément grossier, donc un ou plusieurs éléments fins) est effectuée.

#### IV.4.1.b Gestion des champs définis aux points de Gauss

Pour la projection des champs définis aux points de Gauss (contraintes, déformations, variables internes, ...), nous avons choisi d'appliquer au point de Gauss du maillage fin la valeur du champ au point de Gauss le plus proche sur le maillage projeté. Le fait d'utiliser des maillages hiérarchiques facilite cette tâche, puisqu'elle nous assure l'unicité du point de Gauss le plus proche. Les figures IV.23 et IV.24 illustrent la projection depuis le niveau  $n - 1$  ou  $n - 2$  respectivement. Ces cas sont représentatifs des situations auxquelles nous pourrions être confrontés, puisque les zones de raffinement évoluent peu d'un pas de temps sur l'autre si celui-ci est représentatif des phénomènes mis en jeu.

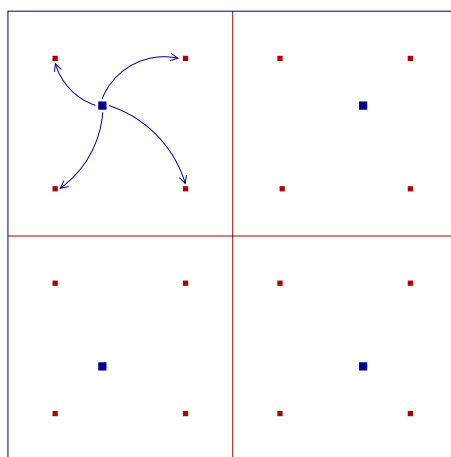


FIGURE IV.23 – Projection des champs aux points de Gauss sur le niveau  $n$  (en rouge) - Depuis le niveau  $n - 1$  (en bleu)

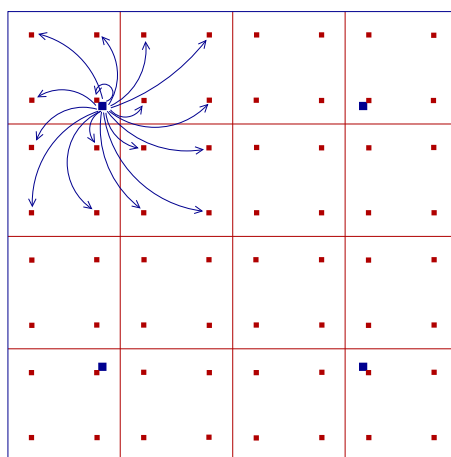


FIGURE IV.24 – Projection des champs aux points de Gauss sur le niveau  $n$  (en rouge) - Depuis le niveau  $n - 2$  (en bleu)

Cette méthode de projection convient en particulier aux lois de comportement à seuil. En effet, le fait de réappliquer directement la valeur obtenue au point de Gauss garantit qu'aucune des valeurs

obtenues par projection ne dépasse le seuil. Cette garantie n'est pas forcément assurée dans le cas d'algorithmes de projection basés sur des interpolations et des extrapolations par exemple.

#### IV.4.1.c Optimisation des projections

D'autre part, deux stratégies de projection des CI seront étudiées. La première consiste à projeter l'ensemble des champs nécessaires au calcul sans distinction. La deuxième consiste à ne projeter que le minimum de champs et à recalculer le reste des données. Par exemple, les déformations totales pourront être obtenues à partir des déplacements, le champ des contraintes pourra être obtenu à partir des déformations élastiques et les déformations visco-plastiques se déduisent aisément des déformations totales et élastiques.

L'avantage de tout projeter est de ne pas avoir besoin de distinguer les champs ni de vérifier au préalable leur existence et leur nom (au sens de CAST3M). En particulier, cette technique est valable quelle que soit la loi de comportement utilisée et les noms choisis pour les inconnues lors du développement de la loi. Cette technique semble la plus pérenne dans le cadre d'une application industrielle.

Cependant, la projection minimale des données peut permettre par le recalcul des autres variables internes d'assurer la vérification de certaines équations du problème (IV.2), ce qui est nécessaire si le solveur vérifie l'équilibre initial du calcul par exemple. Cependant l'inconvénient de recalculer une partie des champs nécessaires au calcul est l'erreur qui peut découler d'un calcul réalisé à partir d'un champ projeté sur lequel existe une incertitude.

Nous pouvons de plus remarquer que le code éléments finis utilisé, CAST3M, initialise automatiquement la valeur des déformations totales à partir de celle fournie pour les déplacements. Ainsi, l'équation

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\text{grad}(\mathbf{u}) + \text{grad}^T(\mathbf{u}))$$

est toujours vérifiée par l'état initial, quel que soit l'algorithme de projection choisi.

Par ailleurs, comme les champs projetés sur le nouveau maillage sont en général hors équilibre, CAST3M tient compte de ce déséquilibre dans les efforts internes initiaux (cf. section IV.1.3), ce qui permet d'obtenir une solution finale équilibrée mais pouvant être entachée d'une erreur numérique. Une autre solution pour traiter ce déséquilibre initial est de redécouper le pas de temps de l'incrément suivant afin de rééquilibrer les variables [Boroomand et Zienkiewicz, 1999]. Une comparaison entre ces deux méthodes et en particulier la mesure de la diffusion numérique pourrait être envisagée.

Il faut de plus prendre garde à minimiser la diffusion numérique lors de la projection des champs. La méthode de transfert direct de la valeur du point de Gauss le plus proche a été choisie ici car elle a l'avantage de fournir une solution acceptable à moindre coût, en particulier dans le cas où le maillage varie peu, ce qui sera le cas pour nos simulations. Néanmoins, pour des problèmes mécaniques plus complexes et en particulier en cas d'endommagement, d'autres méthodes comme le lissage par moindres carrés donnent des résultats plus satisfaisants. Le lecteur peut se reporter à [Feld-Payet, 2012] pour plus de détails sur ces méthodes et leur mise en œuvre.

Dans la suite, nous allons nous focaliser sur la fiabilité des projections proposées. Les temps de calcul ne seront pas reportés car les procédures de projection ne sont pas optimisées (gestion de la zone de conservation des données, parallélisation de la projection, optimisation pour le cas particuliers des maillages hiérarchiques, ...).

### IV.4.2 Quelques éléments de validation

Afin de valider nos opérateurs de projection, nous avons réalisé quelques tests sur le même exemple que précédemment, avec un maillage fixé *a priori*. Par contre, compte-tenu du temps de calcul prohibitif de la méthode d'Euler implicite, nous avons ici choisi d'utiliser la méthode d'intégration temporelle disponible par défaut dans CAST3M, qui est basée sur un algorithme de type Runge-Kutta 4-2 et qui a été optimisée.

Dans un premier temps, nous avons réalisé l'exercice de projeter les champs sur le maillage dont ils proviennent. Ceci a pour but de vérifier la précision des projections mises en œuvre. Le tableau IV.3 regroupe les résultats pour les deux types de projection. Nous avons rappelé dans ce tableau les résultats obtenus lorsque le solveur est appliqué sur un maillage fixe. Il n'y a donc dans ce cas aucune projection à effectuer. Les deux autres cas correspondent au cas classique d'une procédure de remaillage en temps où l'ensemble des sous-niveaux peut être redéfini entre deux pas de temps. Dans le cas particulier regardé ici, les nouveaux sous-niveaux sont redéfinis à chaque pas de temps de manière identique à ceux du pas de temps précédent.

Projection du niveau $n$ vers le niveau $n - \ e_h\ _{L^\infty, comp}$ Maillage $h_0 = h_i$ et $l^* = 2$		
Maillage fixe	Maillage redéfini Projection totale des CI	Maillage redéfini Projection partielle et calcul des CI
$1.26 \cdot 10^{-1}$	$1.26 \cdot 10^{-1}$	$1.27 \cdot 10^{-1}$

TABLE IV.3 – Performances de la méthode LDC en fonction de la méthode de projection des CI - Depuis le niveau  $n$  - Fluage de Norton - Cas 2D(r,  $\theta$ )

On remarque que la technique de projection choisie avec interpolation constante par morceaux des valeurs aux points de Gauss est très efficace, puisque la solution n'est pas dégradée lorsque l'ensemble des CI est projeté. Comme attendu, aucune erreur liée à la projection n'est visible dans ce cas. La procédure de projection minimale conduit également à des résultats très satisfaisants : la modification de la solution reste négligeable (moins de 1%).

Dans la suite la technique consistant à ne projeter que le minimum de CI nécessaire sera utilisée.

Nous avons alors étudié l'influence du niveau depuis lequel sont projetées les CI sur la précision du calcul. Pour cela, nous avons étudié trois types de projection : depuis le niveau  $n$ , depuis le niveau  $n - 1$  et depuis le niveau 0. La projection depuis le niveau  $n$  représente la référence. La projection depuis le niveau  $n - 1$  représente le cas le plus classique de projection dans un processus de raffinement dynamique. La projection depuis le niveau 0 représente le cas où seules les informations sur le maillage grossier initial sont conservées. Les résultats sont reportés dans le tableau IV.4.

Influence du niveau de projection des CI sur $\ e_h\ _{L^\infty}$			
Maillage	Depuis le niveau $n$	Depuis le niveau $n - 1$	Depuis le niveau 0
$h_0 = h_i$ et $l^* = 2$	$1.27 \cdot 10^{-1}$	$1.13 \cdot 10^{-1}$	$1.15 \cdot 10^{-1}$
$h_0 = h_i$ et $l^* = 4$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$8.81 \cdot 10^{-3}$	$7.94 \cdot 10^{-3}$

TABLE IV.4 – Performances de la méthode LDC en fonction du niveau de projection des CI - Fluage de Norton - Cas 2D(r,  $\theta$ )

Dans le cas où deux sous-niveaux sont générés, les différences entre les erreurs obtenues sont de l'ordre de 10%, que les informations soient transmises depuis le niveau  $n - 1$  ou depuis le niveau 0. La différence négligeable entre les deux stratégies s'explique par le fait que pour ce cas test, seuls 2 sous-niveaux sont générés. Pour des nombres de sous-niveaux plus élevés, la différence entre les deux stratégies augmente, puisque le fait de tout projeter depuis le niveau  $n - 1$  conduit à une différence de l'ordre de 18% et depuis le niveau 0 à une différence de l'ordre de 26%.

Pour conclure, nous pouvons remarquer que notre procédure assez simple de projection des CI permet d'obtenir des solutions précises si le maillage évolue progressivement au cours du temps.

### IV.4.3 Modification de la position de la singularité

Nous avons ensuite appliqué notre méthode à un problème avec remaillage adaptatif au cours du temps. Nous utilisons pour cela l'estimateur d'erreur *a posteriori* de ZZ, avec un critère de raffinement  $\alpha = 0.25$ . La loi de comportement de la gaine est toujours une loi de fluage de Norton avec un coefficient de 5. Par contre, le chargement évolue au cours de l'historique. La pression interne est constante (80 MPa), mais l'ouverture du fragment de pastille conduit à une localisation de la discontinuité de pression variant linéairement de 5 à 50  $\mu\text{m}$  durant 100 s.

Nous avons alors comparé les résultats obtenus avec le maillage LDC  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2$  ( $\alpha = 0.25$ ) et avec le maillage mono-grille uniforme  $h_0 = h_i/16$ , avec un même pas de temps constant égal à 0.1 s. Le remaillage est effectué tous les 10 pas de temps (soit toutes les 1 s).

Tout d'abord, nous pouvons observer sur la figure IV.25 l'adaptation du maillage LDC en cours de calcul en fonction de la demi-ouverture du fragment  $y_{ouv}$ .

Malgré une ouverture de la fissure variant de 5 à 50  $\mu\text{m}$ , les maillages sont assez peu modifiés au cours du calcul. Ceci est dû au fait que la taille de maille initiale est déjà de 54.5  $\mu\text{m}$ , et que les zones détectées initialement sont structurées et élargies. La procédure de remaillage pourrait même être évitée si on partait de niveaux de grilles un peu plus élargis (comme c'est le cas des maillages *a priori* utilisés en IPG). Ici, les opérations de projection ne s'effectuent donc que sur quelques nœuds et à partir d'un niveau de raffinement immédiatement plus grossier.

Nous avons ensuite comparé les performances de la méthode LDC à celles obtenues sur un maillage uniforme entièrement raffiné pour des pas d'espace fins égaux. La méthode LDC reste très intéressante par rapport à l'utilisation d'un maillage mono-grille uniformément raffiné en terme de nombre de nœuds puisque le maillage  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2$  est en moyenne 12 fois plus léger ( $1.08 \cdot 10^3$  nœuds) que le maillage mono-grille de même taille de maille fine  $h_0 = h_i/16 = 13.6 \mu\text{m}$  ( $1.30 \cdot 10^4$  nœuds). Ces résultats nous permettent donc d'envisager le traitement de maillages locaux beaucoup plus fins que dans le cas d'un maillage mono-grille.

La précision reste par ailleurs satisfaisante car l'écart maximal composite entre les deux solutions en déplacement est de l'ordre de 2.3%.

Nous nous intéressons ensuite aux contraintes de Von Mises obtenues dans la gaine à la fin du chargement, pour un maillage mono-grille de taille  $h_i/16$  et pour le maillage LDC  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2$ , sur la figure IV.26.

La première conclusion à tirer de cette comparaison est que l'allure du champ de Von Mises obtenu dans la gaine est semblable dans le cas d'un maillage mono-grille uniformément raffiné et d'un maillage obtenu par la méthode LDC, pour une même taille de maille fine.

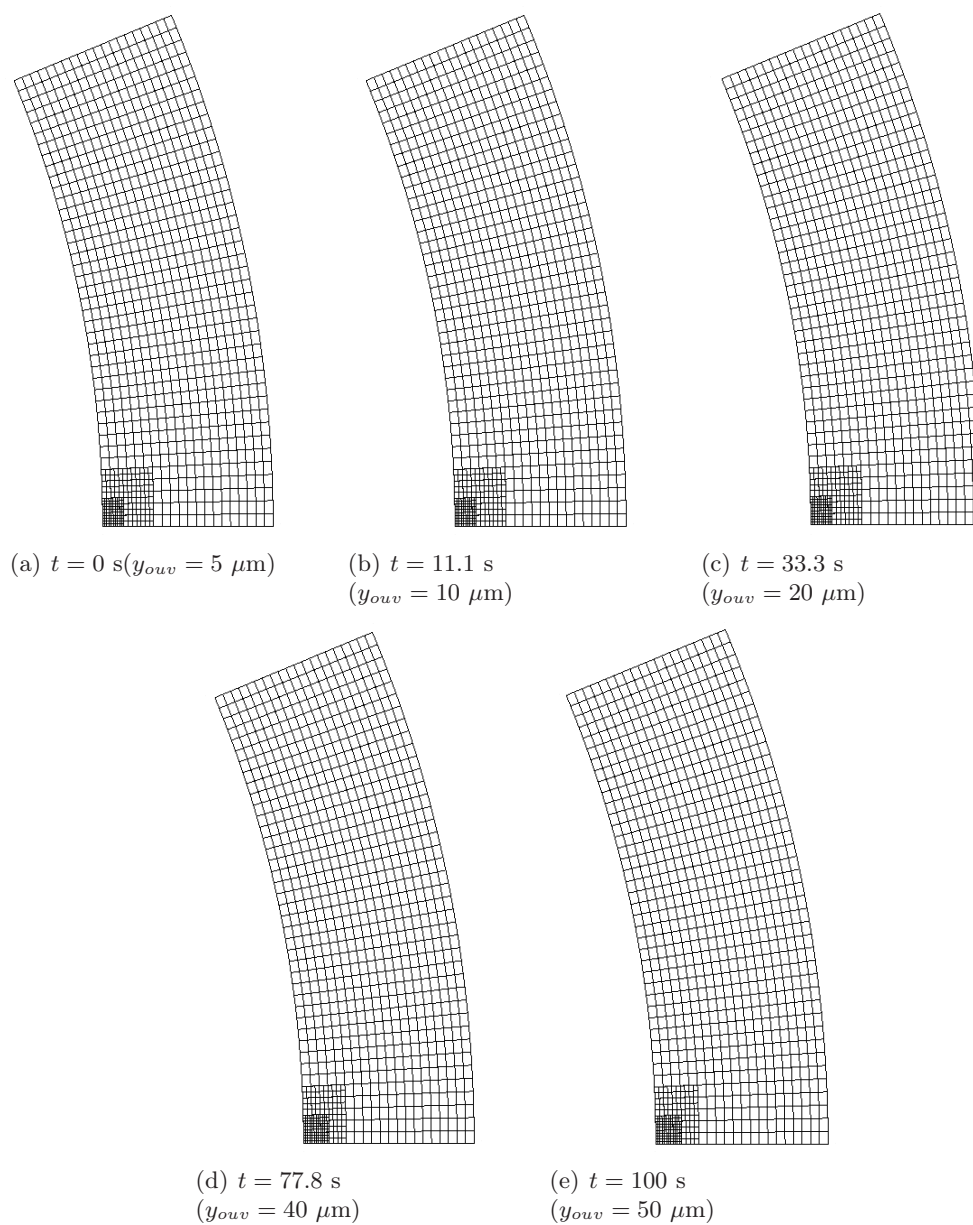


FIGURE IV.25 – Exemple de maillages imbriqués en fonction du temps du calcul - Cas  $2D(r, \theta)$  - Fluage de Norton avec ouverture du fragment - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$  -  $h_0 = h_i/4$  et  $l^* = 2$

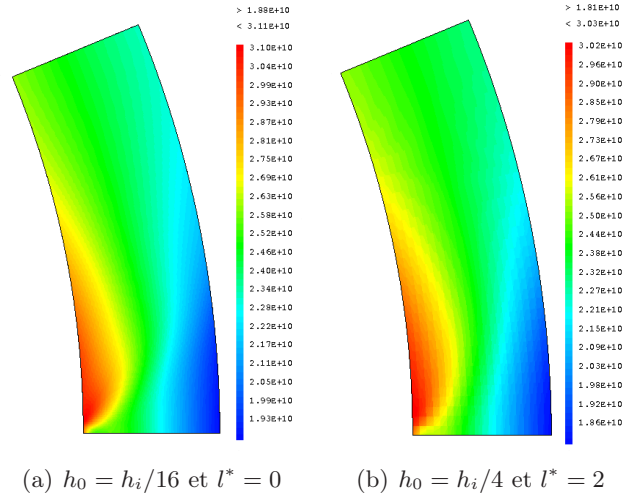


FIGURE IV.26 – Contrainte équivalente de Von Mises - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton avec ouverture du fragment - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

Par ailleurs, si on s'intéresse plus précisément aux valeurs obtenues, on observe que la différence maximale entre les deux champs est de l'ordre de 6%, ce qui reste correct vis-à-vis de la précision des modèles physiques utilisés dans les modélisations industrielles et du critère  $\alpha$  défini *a priori*. On remarque également que les contraintes sont légèrement sous-estimées dans le cas d'un calcul avec la méthode LDC.

Pour finir, nous effectuons donc une étude plus quantitative des résultats obtenus via la méthode LDC. Cette étude se rapproche des études de validation effectuées classiquement dans le cadre de la simulation de l'IPG, et consiste à observer la contrainte équivalente de Von Mises maximale au cours du temps (cf. figure IV.27).

Les valeurs obtenues pour la contrainte maximale de Von Mises au cours du temps sont très satisfaisantes, puisque les deux courbes sont quasiment superposées. Nous pouvons néanmoins remarquer que la contrainte maximale obtenue en fin de calcul est légèrement plus faible dans le cas de la méthode LDC, de l'ordre de 3%. Nous retrouvons donc ici l'écart qui était visible sur la figure IV.26. Cependant, même si cet écart ne va pas dans le sens des critères de sûreté (puisque la contrainte maximale est sous-estimée), sa valeur reste tout à fait acceptable au regard de la précision obtenue par ailleurs (modèle d'IPG, loi de comportement du combustible et de la gaine, ...).

Pour conclure, les premiers résultats obtenus dans cette étude concernant l'adaptation du maillage au cours du temps, même s'ils doivent être complétés, sont déjà satisfaisants. Ils confirment la faisabilité d'une simulation de type IPG grâce à la méthode LDC couplée à l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ. En effet, le fort gain en nombre de nœuds pour les exemples proposés et les améliorations envisagées pour diminuer le temps de calcul (projection, intégration de la loi de comportement dans le solveur non linéaire) vont permettre de réaliser des études sur des maillages locaux de pas très fin.



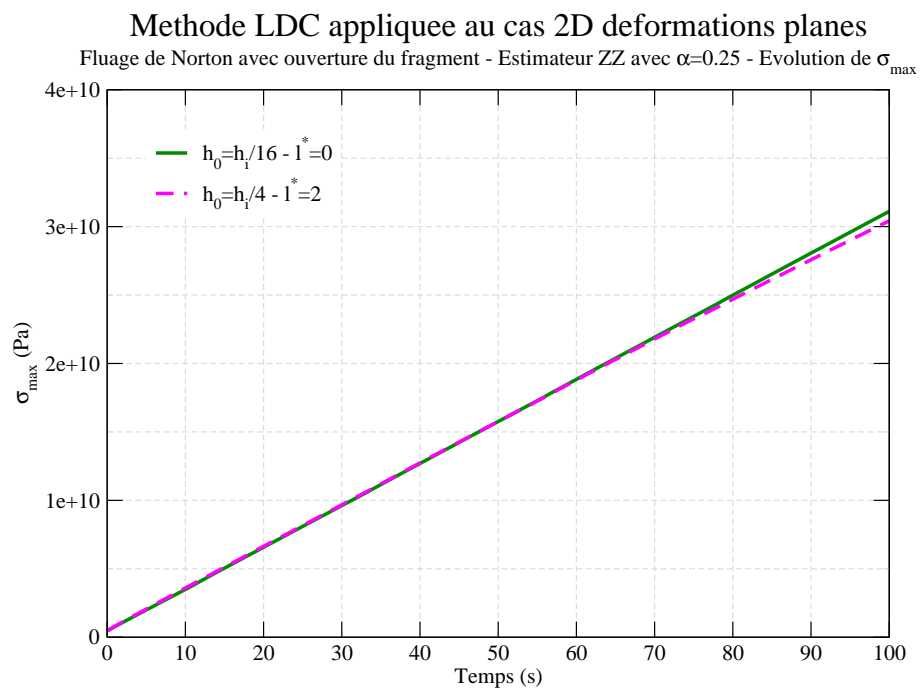


FIGURE IV.27 – Évolution de la contrainte maximale au cours du temps - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton avec ouverture du fragment - Estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ avec  $\alpha = 0.25$

## Conclusion

Dans cette partie nous avons étendu la méthode LDC à la mécanique non linéaire des solides. En effet, une non linéarité de comportement induit un certain nombre de changements dans la méthode. De nombreuses vérifications successives ont été effectuées. Ces vérifications semblaient nécessaires ici puisque, à notre connaissance, la méthode LDC n'avait jamais encore été appliquée à la mécanique non linéaire des solides.

Nous avons dans un premier temps découlé l'influence de la non linéarité du comportement de celle liée à son évolution temporelle. Pour cela, nous avons tout d'abord appliqué la méthode LDC à une loi de comportement élastique non linéaire dont le comportement est indépendant de l'historique de chargement. Cette première étude a permis de vérifier que la méthode LDC continue à converger de façon optimale en  $O(d_{h_{fin}})$  lorsque le problème contient une non linéarité matérielle. De plus l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ a été combiné avec succès à cette méthode de raffinement. L'intérêt de partir d'un maillage de départ grossier et d'utiliser de nombreux sous-niveaux pour atteindre une erreur voulue a de nouveau été montré, du point de vue du nombre de nœuds. Les résultats en temps CPU restent également compétitifs dès que la taille de maille est inférieure à  $20\ \mu\text{m}$ . Enfin, la comparaison de la méthode LDC à une méthode de type raffinement h-adaptatif global a conforté les performances de la méthode LDC pour traiter des problèmes à singularités locales.

Une évolution temporelle du comportement a ensuite été ajoutée. Pour cela, nous avons étudié un comportement de type fluage de Norton, avec un chargement évolutif. Les résultats sont là encore très satisfaisants puisque la convergence en  $O(d_{h_{fin}})$  a de nouveau été atteinte. Un raffinement spatio-temporel a ensuite été testé mais l'utilisation d'un pas de temps constant sur tous les niveaux de grille et cohérent avec le pas de maillage le plus fin semble offrir un meilleur compromis erreur obtenue sur temps de calcul.

Pour finir, la gestion de l'évolution dynamique du maillage a été traitée. En effet, un des intérêts du raffinement local pour les problèmes non linéaires à singularités locales tient dans le fait de pouvoir remailler automatiquement la structure en cours de calcul en fonction de l'évolution du problème traité. Un certain nombre d'opérations de projection entre maillages sont alors nécessaires. Une stratégie assez simple a été proposée et permet d'obtenir des solutions très satisfaisantes. Un cas test d'application avec chargement dynamique et loi de comportement non linéaire à effet d'histoire permet de tester l'efficacité de l'extension de la méthode LDC proposée ici.

Les résultats obtenus sont prometteurs même si l'algorithme utilisé est loin d'être optimisé. Nous avons choisi, en effet, de calquer la méthode LDC présente dans la littérature indépendamment du problème mécanique considéré. Si nous avons obtenu de très bonnes performances dans un cas non linéaire indépendant du temps, une étude mathématique plus poussée est à envisager afin de permettre de retrouver en non linéaire quasi-statique les performances de l'algorithme LDC linéaire. L'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre confirment néanmoins la faisabilité d'une étude de type IPG avec l'outil de raffinement automatique développé dans cette thèse.

# Conclusion et perspectives

Le cadre de cette thèse s'articulait autour de la problématique industrielle de l'Interaction Pastille-Gaine (IPG). Cette interaction, qui a lieu sous irradiation, peut conduire lors de transitoires incidentels dans les Réacteurs à Eau sous Pression à la fissuration de la gaine. En pratique, les conditions de fonctionnement définies pour les réacteurs civils permettent d'éviter l'apparition d'un tel phénomène. En effet, les conditions limites sont données avec des marges de sûreté. Des essais en réacteurs expérimentaux sont réalisés et sont interprétés à l'aide de simulations numériques. Ainsi, la définition précise des mécanismes mis en jeu est améliorée, dans une optique de Recherche & Développement.

L'objectif de cette thèse était de développer une méthode de raffinement permettant de réaliser des calculs fiables sur des maillages ayant localement des tailles de maille inférieures au micron dans des temps de calculs compatibles avec des études de sensibilité. Parmi les méthodes de raffinement existantes, la méthode multi-grille locale de type Local Defect Correction (LDC) est celle qui a été choisie car elle semblait répondre au mieux aux critères requis (maillages conformes, faible nombre de degrés de liberté, utilisation d'un solveur pré-existant). Cependant, l'application de cette méthode à la mécanique des solides n'est pas classique.

Dans un premier temps, nous avons voulu vérifier les possibilités offertes par la méthode LDC sur des problèmes d'élasticité linéaire, lors d'études bidimensionnelles et tridimensionnelles. Une étude détaillée de la généralisation de la méthode à plusieurs sous-niveaux a d'abord été réalisée. Ainsi, la méthode LDC permet de diminuer l'erreur de discrétisation en utilisant des sous-niveaux dont les maillages sont de plus en plus fins, pour un coût de calcul additionnel peu élevé. L'ordre de convergence de cette méthode est celui du schéma de discrétisation par rapport au pas local de maillage. Les performances de la méthode en termes d'espace mémoire et de temps de calcul par rapport à l'utilisation d'un maillage mono-grille uniformément raffiné ont été mises en avant.

La détection des zones d'intérêt a ensuite été automatisée à l'aide de l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu. Cette automatisation permet d'optimiser la taille des zones à raffiner et ainsi de s'affranchir de l'erreur de pollution. Cependant, le choix du seuil, inhérent à tout processus de détection automatique, n'est pas aisé dans ce cas. Une valeur présentant un bon compromis pour tous nos cas tests a néanmoins été proposée.

Nous avons ensuite comparé la méthode mise en œuvre avec d'autres méthodes classiques de raffinement de maillage. Tout d'abord, nous avons regardé si la méthode Full Multi-Grid locale, effectuant une correction progressive de la solution, permettait de mieux localiser les zones à raffiner. Aucune différence notable n'a été trouvée par rapport à notre approche. Puis nous avons comparé la méthode LDC aux méthodes de raffinement de type h-adaptatives (locale et globale). Cette étude comparative a permis de mettre en avant les très bonnes performances en termes de précision, d'espace mémoire et de temps CPU de la méthode LDC, pour des problèmes bidimensionnels comme tridimensionnels.

Pour finir, nous avons étendu la méthode LDC à des problèmes non linéaires avec effet d'histoire. Pour cela, nous nous sommes tout d'abord focalisés sur un comportement non linéaire indépendant du temps, afin de vérifier l'extension de la méthode LDC à des non linéarités matérielles. De bonnes

performances en terme d'espace mémoire ont été obtenues. Les gains en temps de calcul sont plus limités car le solveur utilisé en "boîte noire" ne permet pas de bénéficier de tous les avantages de la méthode LDC. Concernant la prise en compte d'une non linéarité avec effet d'histoire, plusieurs stratégies dépendant du pas de temps choisi ont été étudiées. Un raffinement spatio-temporel, classique dans la littérature, ne semble pas offrir ici le meilleur compromis précision/coût. Dans la suite de l'étude nous avons donc utilisé sur tous les niveaux de grilles un pas de temps compatible avec le pas de maillage fin local. Pour finir, l'adaptation en cours de calcul du raffinement de maillage a été développée. La projection de champs entre différents maillages a dû en particulier être regardée. Les premiers résultats obtenus sur un cas test se rapprochant de celui utilisé dans la simulation de l'IPG sont satisfaisants et démontrent la faisabilité d'une étude à l'aide de la méthode LDC pour réaliser des simulations précises de l'IPG.

L'une des perspectives à court terme de ce travail est de compléter l'étude non linéaire et en particulier de simuler le comportement classique de la gaine contenant le combustible, en 3D. La loi de comportement représentant classiquement le comportement de la gaine dans les études réalisées sur l'IPG est plus complexe que la loi de fluage de Norton que nous avons utilisée. Néanmoins, le passage de l'une à l'autre ne devrait pas présenter de difficultés pour la méthode LDC. De même, le passage du problème 2D au problème 3D a déjà été traité pour l'élasticité linéaire et sa transposition pour des problèmes non linéaires semble relativement aisée. L'utilisation d'une méthode de décomposition de domaine pourra alors être envisagée car la présence de deux singularités croisées dans le problème 3D s'y prête particulièrement. Des optimisations informatiques sur les projections et le solveur non linéaire utilisé devront être réalisées afin d'obtenir des temps de calcul très compétitifs.

De plus, les tailles de mailles souhaitées, et déjà atteintes dans notre étude, sont de l'ordre du micron, ce qui est inférieur à la taille du Volume Élémentaire Représentatif du comportement macroscopique de la gaine. Il peut alors s'avérer nécessaire d'utiliser un modèle microscopique sur les sous-niveaux les plus fins, ce qui semble possible grâce aux propriétés d'adaptation de la méthode LDC.

Une fois ces études réalisées, le module développé (raffinement automatique du maillage et résolution par la méthode LDC) pourra être intégré dans la plate-forme logicielle PLEIADES développée actuellement au CEA, afin de réaliser des calculs permettant le post-traitement du comportement de la gaine. Un calcul grossier représentant la pastille et la gaine ainsi que leur interaction de contact sera d'abord réalisé afin d'obtenir le chargement que la pastille impose sur la gaine. Puis, une résolution LDC sur la gaine permettra d'obtenir des informations locales plus précises.

Parmi les perspectives à long terme de ce travail, une étude mathématique plus approfondie du raffinement spatio-temporel pourrait permettre d'améliorer encore les performances de la méthode en mécanique des solides non linéaires.

Pour finir, pour compléter la simulation de l'IPG, il reste à modéliser le contact entre la pastille et la gaine. L'extension de la méthode LDC aux problèmes de contact devra tout d'abord être étudiée. Deux problèmes se poseront alors, celui du raffinement multi-corps (choix d'un raffinement en vis-à-vis ou indépendant) et celui de la modification éventuelle du terme de correction à cause de la présence de contact et frottement. Il s'avérera alors peut-être nécessaire de se pencher sur le développement d'un estimateur d'erreur *a posteriori* adapté au traitement d'un problème de contact.

Les résultats obtenus dans cette thèse montrent que la méthode multi-grille locale de type "Local Defect Correction" répond aux besoins de simulations précises de l'IPG. L'outil de raffinement développé dans cette thèse peut par ailleurs aisément s'étendre à d'autres domaines de la mécanique des solides (structures en béton armé, contact-frottement entre un pneumatique et le sol, ...).

# ANNEXES



# Annexe A

## Méthodes multi-grilles

### Sommaire

---

A.1	Principe . . . . .	<b>155</b>
A.2	“Full Approximation Storage” et “Correction Scheme” . . . . .	<b>156</b>
A.3	“Full Multigrid” . . . . .	<b>158</b>
A.4	Approches algébriques et géométriques . . . . .	<b>158</b>
A.4.1	Les méthodes multi-grilles algébriques . . . . .	159
A.4.2	Les méthodes multi-grilles géométriques . . . . .	160
A.4.3	Comparaison . . . . .	160

---





Les méthodes multi-grilles (MG) ont été introduites au début des années 60 pour la résolution de l'équation de Poisson dans un carré par Fedorenko [Fedorenko, 1961], puis ont été généralisées aux problèmes elliptiques par Brandt [Brandt, 1977]. L'intérêt de ces méthodes est d'accélérer la convergence du calcul sur des maillages possédant de nombreux ddl en utilisant des maillages additionnels plus légers. Ces méthodes ont été et sont beaucoup utilisées dans le cadre de la mécanique des fluides [Brandt *et al.*, 1980, Caughey, 1983, Fulton *et al.*, 1986, Linden *et al.*, 1988, Koren, 1990, Webster, 2011, Gravemeier *et al.*, 2010, ...], alors que les applications à la mécanique des solides restent peu nombreuses, malgré des travaux sur l'élasticité [Parsons et Hall, 1990a, Parsons et Hall, 1990b, Wendland, 1991], l'élastoplasticité [Kacou et Parsons, 1993, Fish *et al.*, 1995, Rannacher et Suttmeier, 1999] ou le contact avec frottement [Lebon, 1995, Lebon *et al.*, 2007].

## A.1 Principe

La méthode consiste à résoudre le problème sur plusieurs niveaux de grilles (maillages) déraffinées générées à partir du maillage initial souvent très raffiné (fort nombre de ddl). Un exemple de maillages est tracé sur la figure A.1.

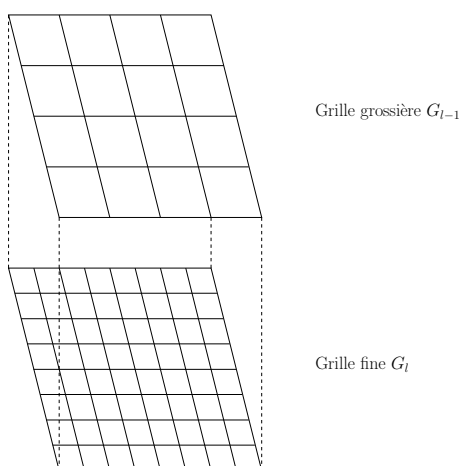


FIGURE A.1 – Exemple très simple de maillages utilisés dans la méthode multi-grilles

Le principe de la méthode est de lisser les hautes fréquences de l'erreur sur le maillage le plus fin, puis d'évaluer les basses fréquences de l'erreur sur l'ensemble des maillages plus grossiers, la résolution sur ces maillages étant plus rapide et moins coûteuse. Des opérateurs de restriction  $R$  (transmission d'un résidu d'un niveau fin vers un niveau grossier) et de prolongement  $P$  (prolongement d'une correction d'un niveau grossier vers un niveau fin) sont définis afin de transmettre des informations d'une grille à l'autre. Les calculs sont alors réalisés de manière itérative jusqu'à convergence de la solution fine. Afin d'assurer la convergence de la méthode, il faut que  $P = R^T$ . L'avantage de cette méthode est qu'elle est très adaptable. La méthode peut être combinée à n'importe quels outils pré-existants (mailleur, solveur, estimateur d'erreur, ...). Par exemple, le solveur peut être changé entre les niveaux et même entre les cycles : il est donc utilisé en "boîte noire". La convergence de la méthode bi-grilles a été étudiée initialement par Brandt [Brandt, 1977], puis par Hackbusch [Hackbusch, 1980, Hackbusch, 1985].

Généralement la solution sur tous les niveaux est lissée et seul le problème sur le niveau le plus grossier est résolu exactement. Selon l'ordre de résolution des différents niveaux, on obtient

différents types de cycles MG :  $V$ -cycle (figure A.2(a)) ou  $W$ -cycle (figure A.2(b)), ce dernier permettant une correction intermédiaire.

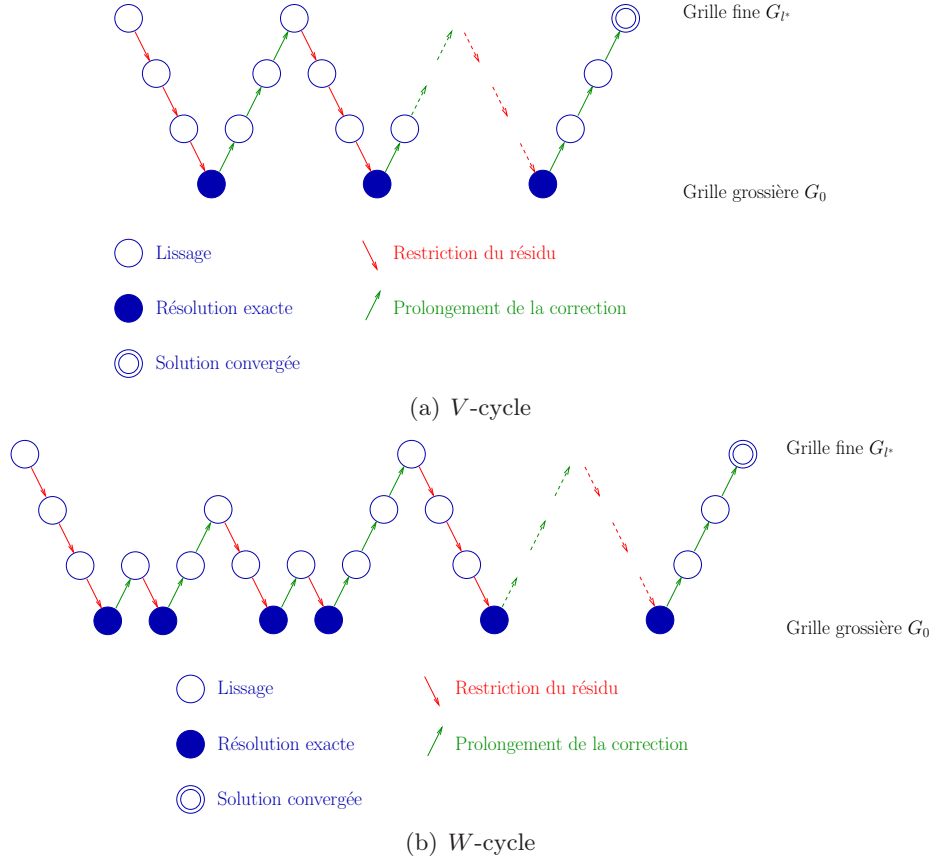


FIGURE A.2 – Représentations du processus multi-grille pour 4 niveaux de grilles :  $V$ -cycle et  $W$ -cycle

## A.2 “Full Approximation Storage” et “Correction Scheme”

L’algorithme de la méthode à deux grilles peut être décomposé comme ce qui suit, en notant  $l$  le niveau de calcul fin et  $l - 1$  le niveau grossier.

Soit le problème discret :

$$\mathcal{L}_l(u_l) = f_l \quad (\text{A.1})$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{L} & : \text{opérateur discret} \\ u & : \text{solution du problème} \\ f & : \text{second membre} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

On effectue quelques itérations de lissage à l'aide d'une méthode itérative classique (gradient conjugué, Jacobi, Gauss-Seidel). On obtient une solution approchée  $\tilde{u}_l$  sur la grille fine.

On restreint la solution et le résidu associé sur la grille grossière à l'aide de deux opérateurs de restriction  $\hat{R}_l^{l-1}$  et  $R_l^{l-1}$  :

$$u_{l-1} = R_l^{l-1}(\tilde{u}_l) \quad (\text{A.3})$$

$$r_{l-1} = \hat{R}_l^{l-1}(\mathcal{L}_l(\tilde{u}_l) - f_l) \quad (\text{A.4})$$

On calcule le second membre associé sur le niveau grossier :

$$d_{l-1} = \mathcal{L}_{l-1}(u_{l-1}) - r_{l-1} \quad (\text{A.5})$$

La solution corrigée  $v_{l-1}$  sur la grille grossière est obtenue en résolvant le problème :

$$\mathcal{L}_{l-1}(v_{l-1}) = d_{l-1} \quad (\text{A.6})$$

On prolonge la correction  $(v_{l-1} - u_{l-1})$  sur la grille fine à l'aide d'un opérateur de prolongement  $P_{l-1}^l$  :

$$u_l = \tilde{u}_l + P_{l-1}^l(v_{l-1} - u_{l-1}) \quad (\text{A.7})$$

À partir de cette solution corrigée, on effectue de nouveau quelques opérations de lissage. On obtient une nouvelle solution approchée  $\tilde{u}_l$  qui va tendre vers la solution réelle du problème discrétisé. On continue jusqu'à convergence de la correction, ou plus souvent jusqu'à un niveau d'erreur sur  $(\mathcal{L}_l(\tilde{u}_l) - f_l)$  donné.

Si  $\mathcal{L}$  est un opérateur linéaire noté alors  $L$ , cette méthode peut se simplifier en remarquant que :

$$L_{l-1}u_{l-1} - L_{l-1}v_{l-1} = L_{l-1}(u_{l-1} - v_{l-1}) \quad (\text{A.8})$$

En notant  $\delta u_{l-1} = u_{l-1} - v_{l-1}$  l'écart sur la grille grossière, il n'est pas nécessaire de restreindre explicitement  $\tilde{u}_l$  et les équations (A.4) à (A.7) se simplifient en :

– Restriction du résidu au niveau grossier à l'aide d'un opérateur de restriction  $\hat{R}_l^{l-1}$  :

$$r_{l-1} = \hat{R}_l^{l-1}(L_l \tilde{u}_l - f_l) \quad (\text{A.9})$$

– Calcul de l'écart  $\delta u_{l-1}$  sur la grille grossière en résolvant le problème :

$$L_{l-1}\delta u_{l-1} = r_{l-1} \quad (\text{A.10})$$

- Prolongement de la correction sur la grille fine à l’aide d’un opérateur de prolongement  $P_{l-1}^l$  :

$$u_l = \tilde{u}_l - P_{l-1}^l(\delta u_{l-1}) \quad (\text{A.11})$$

Ainsi, la méthode MG de résolution d’un problème non linéaire nécessite la conservation de la solution fine et du résidu du problème. Elle est appelée “Full Approximation Storage” (FAS) [Brandt, 1977]. Dans le cas linéaire où seul le résidu doit être restreint, la méthode est appelée “Correction Scheme”(CS). Ces méthodes sont utilisées en solveur mais sont aussi très efficaces en préconditionneur [Boyer *et al.*, 2009] avec des méthodes de Krylov.

Lorsque le problème résolu est non linéaire, une autre approche consiste à linéariser l’opérateur et à utiliser les simplifications du cas linéaire. Cette approche a été comparée à l’algorithme FAS dans [Henson, 2003]. Il montre que pour atteindre l’efficacité du cycle multi-grilles FAS, il faut que seules quelques itérations MG linéaires soient combinées à l’algorithme de Newton. Néanmoins, le nombre de cycles multi-grilles optimaux est complexe à déterminer. C’est pourquoi l’algorithme FAS est considéré comme plus adapté pour résoudre des problèmes non linéaires.

### A.3 “Full Multigrid”

Étant données les potentialités de la méthode MG, plusieurs années après les développements initiaux, Brandt s’est intéressé à l’amélioration de la convergence de la méthode, ce qui a conduit à la création de la méthode “Full Multigrid” (FMG) [Brandt, 1994, Carre et Dervieux, 1999]. En effet, dans le cadre de l’algorithme multi-grilles standard, une première approximation de la solution sur la grille la plus fine  $G_{l^*}$  est nécessaire pour démarrer les itérations de lissage. Le choix le plus courant est  $u_{l^*} = 0$ , mais une bonne approximation initiale permet de réaliser moins de cycles avant convergence. Une approximation de qualité peut alors être obtenue en résolvant le problème sur la grille immédiatement plus grossière  $G_{l^*-1}$  et en interpolant la solution convergée sur la grille  $G_{l^*}$ . En appliquant cette idée récursivement sur des grilles de plus en plus grossières, on obtient la stratégie FMG (cf. figure A.3).

Comme attendu, la convergence de cette méthode est plus rapide : son coût moyen est en  $O(N^d)$  au lieu de  $O(N^d \log N)$  pour la méthode standard, en notant  $N$  le nombre d’inconnues du problème par direction de l’espace et  $d$  la dimension de l’espace, voir [Désidéri, 1998] par exemple. La méthode FMG est donc très utilisée [Carre et Dervieux, 1999, Adams et Taylor, 2000, Borzi, 2007], d’autant plus qu’elle permet de lisser progressivement la solution et peut donc jouer le rôle d’un bon préconditionneur.

### A.4 Approches algébriques et géométriques

La principale difficulté des méthodes multi-grilles est l’obtention des différents niveaux grossiers à partir du maillage initial. Pour cela, deux approches ont été développées, la première basée sur des études algébriques et la seconde sur des études géométriques.

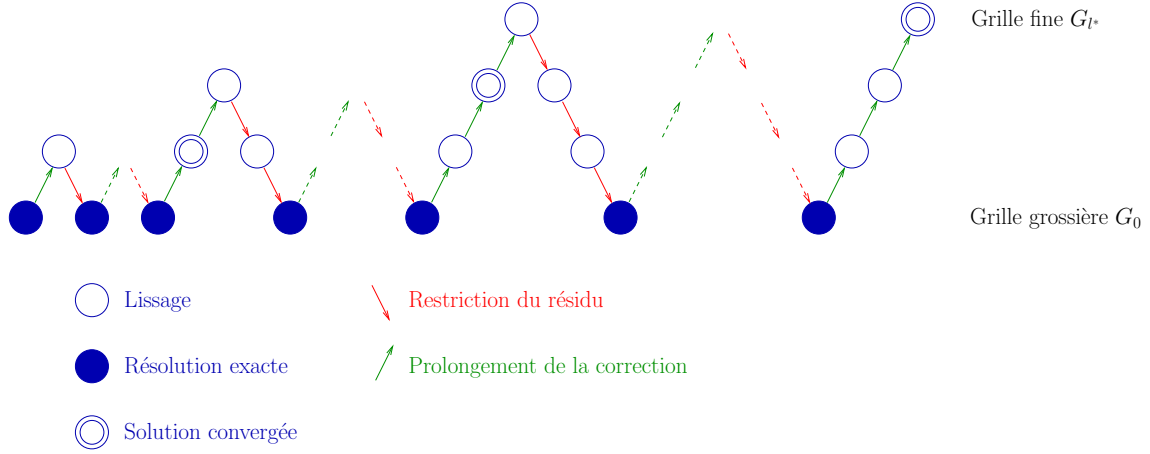


FIGURE A.3 – Représentation du cycle FMG pour 4 niveaux de grilles

#### A.4.1 Les méthodes multi-grilles algébriques

Ces méthodes ont été développées pour résoudre des systèmes linéaires. Elles se basent uniquement sur l'étude de la matrice de calcul (obtenue après construction du système matriciel représentant le problème à résoudre) pour construire les niveaux grossiers et les opérateurs. Deux approches sont possibles, l'analyse matricielle ou l'agglomération.

Lors de la construction par analyse matricielle [Stuben, 2001, Brezina *et al.*, 2006], les opérateurs de prolongement et de restriction sont construits directement à partir de la matrice linéaire  $L_l = (l_{ij})$  du niveau fin en travaillant sur le couplage entre ddl. Les ddl conservés pour le niveau immédiatement plus grossier seront ceux fortement couplés.

On note  $N$  le nombre de ddl du système et  $N_i$  l'ensemble des voisins du ddl  $i$ .

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, N_i = \{j \in \{1, \dots, N\}, j \neq i / l_{ij} \neq 0\} \quad (\text{A.12})$$

Alors  $S_i$  l'ensemble des points auquel le ddl  $i$  est fortement connecté est défini par :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\}, S_i = \{j \in N_i / \forall k \in N_i, |l_{ij}| \geq \alpha \max_k |l_{ik}| \text{ avec } \alpha \in ]0, 1]\} \quad (\text{A.13})$$

On en déduit l'ensemble  $S$  des ddl fortement couplés, qui va représenter l'ensemble des ddl du niveau grossier. L'opérateur de prolongement  $P$  permettant de passer du niveau grossier  $l-1$  au niveau fin  $l$  s'écrit :

$$(u_l)_i = (Pu_{l-1})_i = \begin{cases} (u_{l-1})_i & \text{si } i \in S \\ \sum_{j \in S} \frac{l_{ij}}{l_{ii}} (u_{l-1})_j & \text{si } i \notin S \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

L'opérateur de restriction  $R$  et la matrice grossière  $L_{l-1}$  sont alors définis par :

$$R = P^T \quad (\text{A.15})$$

$$L_{l-1} = RL_lP \quad (\text{A.16})$$

La construction par agglomération [Vanek *et al.*, 2001, Notay, 2010, Webster, 2011, Gravemeier *et al.*, 2010, Adams, 2004] semble beaucoup plus utilisée. Elle se base sur le même principe, mais les ddl d'un niveau grossier sont définis par agrégation des ddl du niveau plus fin à l'aide d'un algorithme d'optimisation de type "glouton". Le lecteur pourra se reporter à [Vince, 2002] pour obtenir des informations complémentaires concernant l'algorithme glouton.

Ces deux méthodes peuvent être appliquées à des problèmes non linéaires en utilisant un algorithme de linéarisation du problème.

#### A.4.2 Les méthodes multi-grilles géométriques

Dans ce cas, les différents niveaux de grilles sont représentés par des maillages de plus en plus grossiers [Wesseling et Oosterlee, 2001, Feng *et al.*, 1997, Mocellin *et al.*, 2001, Adams et Taylor, 2000, Lebon *et al.*, 2007, Guillard, 1993, ...]. La construction de ces différents maillages est en général assez simple, mais des difficultés peuvent apparaître, en particulier lorsque les maillages sont non structurés.

La première méthode consiste à construire des maillages indépendants de plus en plus grossiers, les opérateurs de prolongement et de restriction étant définis par une méthode d'interpolation. Cette méthode est par exemple utilisée dans [Feng *et al.*, 1997]. Son inconvénient majeur est la complexité de ses opérateurs, les grilles n'ayant aucune corrélation entre elles.

La méthode la plus simple et la plus rapide est d'effectuer l'opération inverse du déraffinement : à partir d'un maillage grossier, on obtient un maillage fin en raffinant les éléments successivement. Cette méthode est la plus classique, elle est par exemple utilisée dans [Mocellin *et al.*, 2001, Lebon *et al.*, 2007, ...]. Les maillages sont alors emboîtés par élément, ce qui simplifie la définition des opérateurs de prolongement et de restriction. Cependant, cette méthode nécessite de partir du maillage grossier, qui n'est pas le maillage de calcul et donc qui n'est pas, en général, le maillage fourni par l'utilisateur. De plus, la description géométrique du domaine de calcul peut ne pas être correcte dans le cas de géométries complexes, ce qui peut être limitant.

Enfin, les maillages peuvent être construits de manière à être emboîtés par nœuds, comme c'est le cas par exemple dans [Guillard, 1993, Adams et Taylor, 2000]. À partir des nœuds du maillage fin, un ensemble de nœuds est choisi, dit ensemble maximal indépendant. Un maillage est reconstruit sur ce nuage de points à l'aide d'une méthode de type Delaunay-Voronoi [Golias et Dutton, 1997] par exemple. L'avantage de cette méthode est que la construction des grilles grossières est automatique, même à partir d'un maillage non structuré. L'inconvénient principal est que la géométrie doit être assez régulière pour être correctement maillée à partir de la seule donnée d'une liste de nœuds, sans information de voisinage.

#### A.4.3 Comparaison

La création des différents niveaux de grilles par les méthodes algébriques présente l'intérêt d'être totalement indépendante de la géométrie du problème, donc très facilement automatisable. Ces méthodes permettent de construire les sous-niveaux sans générer de nouveaux maillages, et donc sans problème lié au déraffinement.

Les méthodes géométriques sont assez rapides et robustes, mais l'obtention des maillages grossiers peut s'avérer difficile. L'utilisation de maillages indépendants n'est pas pertinente particulièrement dans les cas nécessitant des remaillages fréquents. Le raffinement à partir d'un niveau grossier semble être la solution pertinente sauf dans les cas où un maillage de calcul fin est fourni par la CAO.





# Table des figures

I.1	Schéma de principe d'un réacteur à eau sous pression . . . . .	5
I.2	Schéma d'un crayon combustible . . . . .	6
I.3	Dimensions caractéristiques des pastilles combustibles . . . . .	7
I.4	Fissuration de la pastille . . . . .	7
I.5	Illustration de la déformation en diabololo : avant (a) et après (b) irradiation, avec influence de la fragmentation (c) . . . . .	8
I.6	Exemple de fissure observée sur une gaine après irradiation en réacteur expérimental (rampe de puissance) . . . . .	9
I.7	Exemples de maillages classiques utilisés pour la modélisation de l'IPG . . . . .	10
I.8	Définition du problème sur la gaine - Cas 2D(r,z) . . . . .	12
I.9	Définition du problème sur la gaine - Cas 2D(r, $\theta$ ) . . . . .	13
I.10	Méthodes adaptatives, cas bidimensionnel . . . . .	16
I.11	Méthode Arlequin : superposition des domaines $\Omega_1$ et $\Omega_2$ et zone de recouvrement $\Omega_M$ . . . . .	18
I.12	Exemple de grilles emboîtées utilisées dans les méthodes multi-grilles locales . . . . .	20
II.1	Exemple de maillages hiérarchiques utilisés dans la méthode LDC . . . . .	31
II.2	Représentation du processus multi-grille local pour 4 niveaux de grilles : $\wedge$ -cycle . . . . .	32
II.3	Étape de prolongement : conditions aux limites sur $G_l$ ( $l \neq 0$ ) . . . . .	34
II.4	Zone de restriction $A_l$ à gauche et zone de correction $\hat{A}_l$ à droite (exemple pour l'opérateur discrétisé sur un stencil à 5 points) . . . . .	35
II.5	Problèmes résolus au cours d'un cycle LDC 3-grilles - Utilisation du second membre « corrigé » . . . . .	47
II.6	Problèmes résolus au cours d'un cycle LDC 3-grilles - Utilisation du second membre « initial » . . . . .	48
II.7	Exemple de maillages imbriqués - Zones d'intérêt définies <i>a priori</i> (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i$ et $l^* = 3$ . . . . .	49
II.8	Norme $L^2$ relative de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	50
II.9	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	52
II.10	Déplacement radial le long de la condition aux limites interpolée du niveau le plus fin - Solution de référence et solution composite LDC après convergence - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Influence du choix du second membre durant l'étape de prolongement - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	53
II.11	Contrainte équivalente de Von Mises - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	54

II.12	Exemple de maillages imbriqués - Zones d'intérêt définies <i>a priori</i> (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2 = 109 \mu\text{m}$ et $l^* = 3$ . . . . .	55
II.13	Norme $L^2$ relative de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	55
II.14	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ( $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ( $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	57
II.15	Contrainte orthoradiale du niveau 0 le long du plan de symétrie en fonction de l'itération de calcul - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	59
II.16	Contrainte orthoradiale du niveau $l^*$ le long du plan de symétrie en fonction de l'itération de calcul - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	60
II.17	Contrainte orthoradiale après convergence en fonction du niveau du maillage - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	60
II.18	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction du temps CPU - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> . . . . .	61
II.19	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction du temps CPU - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> . . . . .	62
II.20	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction du nombre de nœuds total (somme de tous les niveaux) - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> . . . . .	63
II.21	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction du nombre de nœuds total (somme de tous les niveaux) - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> . . . . .	63
III.1	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2 = 163.5 \mu\text{m}$ . . . . .	71
III.2	Exemple de zones détectées (en rouge) et modification afin d'obtenir un maillage structuré (en vert) - Cas 2D(r,z) - $h_0 = h_i/2$ et $l = 1$ . . . . .	73
III.3	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec et sans structuration du maillage - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l = 1$ . . . . .	73
III.4	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction du critère $\alpha$ utilisé dans le processus de raffinement - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire . . . . .	74
III.5	Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.15$ (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i = 327 \mu\text{m}$ et $l^* = 3$ . . . . .	75
III.6	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2 = 109 \mu\text{m}$ . . . . .	77
III.7	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction du critère $\alpha$ utilisé durant le processus de raffinement - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire . . . . .	77
III.8	Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	78
III.9	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	79

III.10	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction du critère $\alpha$ utilisé dans le processus de raffinement - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Rapport de raffinement $r=4$ . . . . .	81
III.11	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha$ optimal - Rapport de raffinement $r=4$ . . . . .	82
III.12	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du temps CPU - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha$ optimal - Comparaison des rapports de raffinement $r = 2$ et $r = 4$ . . . . .	83
III.13	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	85
III.14	Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 3D - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	86
III.15	Exemple de maillages imbriqués obtenus avec des mailles étirées selon l'axe vertical - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 3D - Élasticité linéaire . . . . .	88
III.16	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ et des mailles étirées selon l'axe vertical . . . . .	88
III.17	Exemple de maillages imbriqués obtenus avec des mailles étirées selon l'axe vertical - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.15$ (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 3D - Élasticité linéaire . . . . .	89
III.18	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.15$ et des mailles étirées selon l'axe vertical . . . . .	90
III.19	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avant et après le cycle bi-grille - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i$ et $l = 1$ . . . . .	92
III.20	Zones détectées (en rouge) et raffinées (en vert) avant et après le cycle bi-grille - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i$ et $l = 1$ . . . . .	93
III.21	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avant et après le cycle bi-grille - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l = 1$ . . . . .	93
III.22	Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif global <i>a priori</i> et par la méthode LDC - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	95
III.23	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Comparaison du raffinement h-adaptatif global <i>a priori</i> et de LDC . . . . .	96
III.24	Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif global direct et par la méthode LDC - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	97
III.25	Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif global successif et par la méthode LDC - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	97
III.26	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D(r, $\theta$ ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Comparaison du raffinement h-adaptatif global automatique et de LDC . . . . .	98

III.27	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du nombre de nœuds - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Comparaison du raffinement h-adaptatif global automatique et de LDC . . . . .	99
III.28	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Comparaison du raffinement h-adaptatif global <i>a priori</i> et de LDC . . . . .	101
III.29	Exemple d'éléments à raffiner (en rouge) pour le raffinement h-adaptatif local non conforme - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ . . . . .	103
III.30	Comparaison des maillages composites obtenus par raffinement h-adaptatif local non conforme et par la méthode LDC - Cas 2d(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	104
III.31	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Raffinement h-adaptatif local - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	105
III.32	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ et maillages obtenus après raffinement h-adaptatif local - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i$ . . . . .	105
III.33	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ lors d'un raffinement h-adaptatif local successif - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - $h_0 = h_i/2$ . . . . .	107
IV.1	Courbe de traction élastique non linéaire . . . . .	118
IV.2	Erreur locale fournie par l'estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - $h_0 = h_i/2$ . . . . .	119
IV.3	Exemple de maillages imbriqués - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	120
IV.4	Norme $L^2$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	120
IV.5	Déformations non linéaires et totales - Composante orthoradiale - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	122
IV.6	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du nombre total de nœuds - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	122
IV.7	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	123
IV.8	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du temps de calcul - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Comparaison du raffinement h-adaptatif global <i>a priori</i> et de LDC . . . . .	125
IV.9	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du nombre total de nœuds - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Comparaison du raffinement h-adaptatif global <i>a priori</i> et de LDC . . . . .	125
IV.10	Évolution de la pression interne au cours du temps - Chargement en 3 blocs . . . . .	128
IV.11	Exemple de maillages imbriqués - Zones d'intérêt définies <i>a priori</i> (maillage courant en noir, zone à raffiner en vert) - Cas 2D(r,θ) - Fluage de Norton - Chargement en 3 blocs - $h_0 = h_i/2$ et $l^* = 3$ . . . . .	129
IV.12	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Fluage de Norton - Maillage <i>a priori</i> - $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ s - Fin du bloc 1 . . . . .	130

IV.13	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - Maillage <i>a priori</i> - $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ s - Fin du bloc 2 . . . . .	131
IV.14	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - Maillage <i>a priori</i> - $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$ s - Fin du bloc 3 . . . . .	132
IV.15	Convergence de la $\theta$ -méthode, $\theta = 1$ (Euler implicite), en fonction du pas de temps - Maillage mono-grille $4 \mu\text{m}$ - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton . . . . .	132
IV.16	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité et du bloc de chargement - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - $\Delta t = 10$ s et $\Delta t = 1$ s . . . . .	134
IV.17	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité et du bloc de chargement - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - $\Delta t = 0.1$ s et $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$ s . . . . .	135
IV.18	Schémas de résolution temporels - $M$ -cycle et $\wedge$ -cycle pour $r = 2$ . . . . .	136
IV.19	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - $\Delta t_{i,1} = 0.8$ s et raffinement espace-temps - Fin du bloc 1 . . . . .	137
IV.20	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - $\Delta t_{i,2} = 0.8$ s et raffinement espace-temps - Fin du bloc 2 . . . . .	138
IV.21	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton - $\Delta t_{i,3} = 2 \cdot 10^{-2}$ s et raffinement espace-temps - Fin du bloc 3 . . . . .	139
IV.22	Transmission des informations entre niveaux entre deux pas de temps - Maillages imbriqués . . . . .	140
IV.23	Projection des champs aux points de Gauss sur le niveau $n$ (en rouge) - Depuis le niveau $n - 1$ (en bleu) . . . . .	141
IV.24	Projection des champs aux points de Gauss sur le niveau $n$ (en rouge) - Depuis le niveau $n - 2$ (en bleu) . . . . .	141
IV.25	Exemple de maillages imbriqués en fonction du temps du calcul - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton avec ouverture du fragment - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - $h_0 = h_i/4$ et $l^* = 2$ . . . . .	145
IV.26	Contrainte équivalente de Von Mises - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton avec ouverture du fragment - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	146
IV.27	Évolution de la contrainte maximale au cours du temps - Cas 2D( $r, \theta$ ) - Fluage de Norton avec ouverture du fragment - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	147
A.1	Exemple très simple de maillages utilisés dans la méthode multi-grilles . . . . .	155
A.2	Représentations du processus multi-grille pour 4 niveaux de grilles : $V$ -cycle et $W$ -cycle . . . . .	156
A.3	Représentation du cycle FMG pour 4 niveaux de grilles . . . . .	159



# Liste des tableaux

II.1	Norme $L^\infty$ relative de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ('i' : $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ('c' : $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	51
II.2	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ('i' : $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ('c' : $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . .	51
II.3	Norme $L^\infty$ relative de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ('i' : $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ('c' : $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	56
II.4	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Maillage <i>a priori</i> - Comparaison entre le second membre "initial" ('i' : $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ('c' : $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . .	57
III.1	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,z) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha$ optimal - Comparaison entre le second membre "initial" ('i' : $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ('c' : $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	76
III.2	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction de la distance initiale à la singularité - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha$ optimal - Comparaison entre le second membre "initial" ('i' : $f_{l,p}^k = f_l^0$ ) et "corrigé" ('c' : $f_{l,p}^k = f_{l,r}^{k-1}$ ) . . . . .	78
III.3	Comparaison entre les rapports de raffinement 2 et 4 - Cas 2D(r, θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha$ optimal . . . . .	84
III.4	Performances de la méthode LDC en fonction du maillage - Cas 3D - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . . . .	87
III.5	Comparaison entre les méthodes de raffinement LDC ( $r = 2$ ) et h-locale non conforme - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Nombre de nœuds totaux et maxima locaux . . . . .	106
III.6	Comparaison entre les méthodes de raffinement LDC ( $r = 2$ ) et h-locale non conforme - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - Temps CPU . . . . .	107
III.7	Comparaison entre les versions directe ('d') et successive ('s') du raffinement h-adaptatif local - Cas 2D(r,θ) - Élasticité linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ - $l^* = 2$ . . . . .	108
IV.1	Norme $L^\infty$ relative composite de l'erreur en fonction du maillage - Cas 2D(r,θ) - Élasticité non linéaire - Estimateur d'erreur <i>a posteriori</i> ZZ avec $\alpha = 0.25$ . . .	121
IV.2	Performances de la méthode LDC en fonction du raffinement temporel - Fluage de Norton - Cas 2D(r,θ) . . . . .	137

IV.3	Performances de la méthode LDC en fonction de la méthode de projection des CI - Depuis le niveau $n$ - Fluage de Norton - Cas $2D(r, \theta)$ . . . . .	143
IV.4	Performances de la méthode LDC en fonction du niveau de projection des CI - Fluage de Norton - Cas $2D(r, \theta)$ . . . . .	143



# Bibliographie

- [Adams, 2004] ADAMS, M. (2004). Algebraic multigrid methods for constrained linear systems with applications to contact problems in solid mechanics. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 11(2-3):141–153.
- [Adams et Taylor, 2000] ADAMS, M. et TAYLOR, R. (2000). Parallel multigrid solvers for 3d-unstructured large deformation elasticity and plasticity finite element problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, 36:197–214.
- [Ainsworth et Oden, 1997] AINSWORTH, M. et ODEN, J. (1997). A posteriori error estimation in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142:1–88.
- [Alberman et al., 1997] ALBERMAN, A., ROCHE, M., COUFFIN, P., BENDOTTI, S., MOULIN, D. et BOUTFROY, J. (1997). Technique for power ramp tests in the ISABELLE 1 loop of the OSIRIS reactor. *Nuclear Engineering and Design*, 168:293–303.
- [Angot et al., 1992] ANGOT, P., CALTAGIRONE, J. et KHADRA, K. (1992). Une méthode adaptative de raffinement local : la Correction de Flux à l'Interface. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 315:739–745.
- [Angot et Laugier, 1994] ANGOT, P. et LAUGIER, M. (1994). The FIC method of conservative connection between nested subdomains for an ocean circulation model. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris - Série II - Part 1*, 319(9):993–1000.
- [Anthonissen et al., 2005] ANTHONISSEN, M., BENNET, B. et SMOOKE, M. (2005). An adaptive multilevel local defect correction technique with application to combustion. *Combustion Theory and Modelling*, 9:273–299.
- [Anthonissen et al., 2003] ANTHONISSEN, M., MATTHEIJ, R. et BOONKKAMP, J. (2003). Convergence analysis of the local defect correction method for diffusion equations. *Numerische Mathematik*, 95(3):401–425.
- [Anthonissen et al., 1998] ANTHONISSEN, M., van 't HOF, B. et REUSKEN, A. (1998). A finite volume scheme for solving elliptic boundary value problems on composite grids. *Computing*, 61:285–305.
- [Askas et Rodriguez-Ferran, 2001] ASKES, H. et RODRIGUEZ-FERRAN, A. (2001). A combined rh-adaptive scheme based on domain subdivision. Formulation and linear examples. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(3):253–273.
- [Babuska et Rheinboldt, 1978] BABUSKA, I. et RHEINBOLDT, W. (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1597–1615.
- [Babuska et al., 1994] BABUSKA, I., STROUBOULIS, T., MARTHUR, A. et UPADHYAY, C. (1994). Pollution-error in the h-version of the finite-element method and the local quality of a-posteriori error estimators. *Finite Elements in Analysis and Design*, 17:273–321.
- [Babuska et Suri, 1987] BABUSKA, I. et SURI, M. (1987). The optimal convergence rate of the p-version of the finite-element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 24(4):750–776.

- [Bailly *et al.*, 1997] BAILLY, H., MÉNESSIER, D. et PRUNIER, C. (1997). *Le combustible nucléaire des réacteurs à eau sous pression et des réacteurs à neutrons rapides*. Commissariat à l'Énergie Atomique.
- [Barbié et Ramière, 2012] BARBIÉ, L. et RAMIÈRE, I. (2012). Développement de méthodes multi-grilles locales pour la modélisation 3D de problèmes élastiques issus de l'Interaction Mécanique Pastille-Gaine. Rapport technique NT 12-012, CEA/DEN/CAD/DEC/SESC/LSC.
- [Barbié *et al.*, 2012] BARBIÉ, L., RAMIÈRE, I. et LEBON, F. (2012). A multilevel technique based on nested local meshes for nonlinear mechanics. In TOPPING, B., éditeur : *Proceedings of the Eighth International Conference on Engineering Computational Technology*. Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK. Paper 88, doi :10.4203/ccp.100.88, 4-7 September, Dubrovnik, Croatia.
- [Barbié *et al.*, 2013] BARBIÉ, L., RAMIÈRE, I. et LEBON, F. (2013). An automatic multilevel refinement technique based on nested local meshes for nonlinear mechanics. *soumis*.
- [Barbié *et al.*, 2014] BARBIÉ, L., RAMIÈRE, I. et LEBON, F. (2014). Strategies around the local defect correction multi-level refinement method for three-dimensional linear elastic problems. *Computers and Structures*, 130:73–90.
- [Baron et Bouffieux, 2002] BARON, D. et BOUFFIEUX, P. (2002). *Le crayon combustible des réacteurs à eau pressurisée de grande puissance (Tranches 900 et 1300 MWe)*. École Centrale de Nantes. Cours de l'École Centrale de Nantes.
- [Barros *et al.*, 2004] BARROS, F., PROENCA, S. et de BARCELLOS, C. (2004). Generalized finite element method in structural nonlinear analysis - a p-adaptive strategy. *Computational Mechanics*, 33(2):95–107.
- [Bauman *et al.*, 2008] BAUMAN, P., BEN DHIA, H., ELKHODJA, N., ODEN, J. et PRUDHOMME, S. (2008). On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum model. *Computational Mechanics*, 42(4):511–530.
- [Belliard et Grandotto, 2003] BELLIARD, M. et GRANDOTTO, M. (2003). Local zoom computation of two-phase flows in steam generators using a local defect correction method. *Numerical Heat Transfer - Part A Applications*, 43(2):111–135.
- [Belytschko et Tabbara, 1993] BELYTSCHKO, T. et TABBARA, M. (1993). H-adaptive finite-element methods for dynamic problems, with emphasis on localization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(24):4245–4265.
- [Ben Dhia, 1998] BEN DHIA, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série II b*, 326:899–904.
- [Ben Dhia, 2008] BEN DHIA, H. (2008). Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3):215–232.
- [Ben Dhia et Rateau, 2001] BEN DHIA, H. et RATEAU, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris Série I*, 332:649–654.
- [Bergallo *et al.*, 2000] BERGALLO, M., NEUMANN, C. et SONZOGNI, V. (2000). Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(4):755–774.
- [Berger et Colella, 1989] BERGER, M. et COLELLA, P. (1989). Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 82:64–84.
- [Berger et Oliger, 1984] BERGER, M. et OLIGER, J. (1984). Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 53(3):484–512.

- [Biboulet *et al.*, 2013] BIBOULET, N., GRAVOUIL, A., DUREISSEIX, D., LUBRECHT, A. et COMBESCURE, A. (2013). An efficient linear elastic FEM solver using automatic local grid refinement and accuracy control. *Finite Elements in Analysis and Design*, 68:28–38.
- [Biotteau, 2010] BIOTTEAU, E. (2010). *Stratégie multigrille et raffinement automatique à précision contrôlée pour la dynamique transitoire non-linéaire*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
- [Biotteau *et al.*, 2010] BIOTTEAU, E., GRAVOUIL, A., LUBRECHT, A. et COMBESCURE, A. (2010). Multigrid solver with automatic mesh refinement for transient elastoplastic dynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(8):947–971.
- [Biotteau *et al.*, 2012] BIOTTEAU, E., GRAVOUIL, A., LUBRECHT, A. et COMBESCURE, A. (2012). Three dimensional automatic refinement method for transient small strain elastoplastic finite element computations. *Computational Mechanics*, 49(1):123–136.
- [Biscani *et al.*, 2011] BISCANI, F., GIUNTA, G., BELOUETTAR, S., CARRERA, E. et HU, H. (2011). Variable kinematic beam elements coupled via Arlequin method. *Composite Structures*, 93(2):697–708.
- [Boroomand et Zienkiewicz, 1999] BORROOMAND, B. et ZIENKIEWICZ, O. (1999). Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II : Adaptivity in nonlinear problems of elastoplasticity behaviour. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176:127–146.
- [Borrel *et al.*, 2006] BORREL, M., RYAN, J. et BILLET, G. (2006). A generalized patch AMR platform that uses cell centered or cell vertex solvers. In WESSELING, P., ONATE, E. et PÉRIAUX, J., éditeurs : *European Conference on Computational Fluid Dynamics*. ECCOMAS CFD. September 5-8, Egmond aan Zee, The Netherlands.
- [Borzi, 2007] BORZI, A. (2007). High-order discretization and multigrid solution of elliptic nonlinear constrained optimal control problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200:67–85.
- [Bouillard *et al.*, 1996] BOUILLARD, P., ALLARD, J. et WARZEE, G. (1996). Superconvergent patch recovery technique for the finite element method in acoustics. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12(9):581–594.
- [Boussetta *et al.*, 2006] BOUSSETTA, R., COUPEZ, T. et FOURMENT, L. (2006). Adaptive remeshing based on a posteriori error estimation for forging simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(48-49):6626–6645.
- [Boyer *et al.*, 2009] BOYER, F., LAPUERTA, C., MINJEAUD, S. et PIAR, B. (2009). A local adaptive refinement method with multigrid preconditioning illustrated by multiphase flows simulations. In BESSE, C., GOUBET, O., GOUDON, T. et NICAISE, S., éditeurs : *ESAIM : Proceedings, CANNUM 2008*, volume 27, pages 15–53. 26-30 May, Saint Jean de Monts, France.
- [Brandt, 1977] BRANDT, A. (1977). Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. *Mathematics of Computation*, 31:333–390.
- [Brandt, 1994] BRANDT, A. (1994). Rigorous quantitative-analysis of multigrid .1. constant-coefficients 2-level cycle with l2-norm. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(6):1695–1730.
- [Brandt *et al.*, 1980] BRANDT, A., DENDY, J. et RUPPEL, H. (1980). The multigrid method for semi-implicit hydrodynamics codes. *Journal of Computational Physics*, 34(3):348–370.
- [Brezina *et al.*, 2006] BREZINA, M., FALGOUT, R., MACLACHLAN, S., MANTEUFFEL, T., MCCORMICK, S. et RUGE, J. (2006). Adaptive algebraic multigrid. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(4):1261–1286.

- [Brochard *et al.*, 2001] BROCHARD, J., BENTEJAC, F., HOURDEQUIN, N., SEROR, S., VERDEAU, C., FANDEUR, O., LANSIART, S. et VERPEAUX, P. (2001). Modelling of Pellet Cladding Interaction in PWR fuel. In *Transactions SMIRT*, volume 1314. SMiRT 16, Washington DC.
- [Cao *et al.*, 2001] CAO, W., HUANG, W. et RUSSELL, R. (2001). Comparison of two-dimensional r-adaptive finite element methods using various error indicators. *Mathematics and Computers in Simulation*, 56:127–143.
- [Carre et Dervieux, 1999] CARRE, G. et DERVIEUX, A. (1999). On the application of FMG to variational approximation of flow problems. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 12(2):99–117.
- [CAST3M, 2013] CAST3M (2013). [www.cast3m.cea.fr](http://www.cast3m.cea.fr).
- [Caughey, 1983] CAUGHEY, D. (1983). Multi-grid calculation of three-dimensional transonic potential flows. *Applied Mathematics and Computation*, 13(3-4):241–260.
- [Cavin *et al.*, 2005] CAVIN, P., GRAVOUIL, A., LUBRECHT, A. et COMBESURE, A. (2005). Efficient FEM calculation with predefined precision through automatic grid refinement. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41:1043–1055.
- [CEA, 2013] CEA (2013). [www.cea.fr](http://www.cea.fr). Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives.
- [Chamoin et Ladevèze, 2008] CHAMOIN, L. et LADEVÈZE, P. (2008). A non-intrusive method for the calculation of strict and efficient bounds of calculated outputs of interest in linear viscoelasticity problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:994–1014.
- [Ciarlet, 1978] CIARLET, P. G. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, volume 4 de *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Company, J. Lions, G. Papanicolaou and R.T. Rockafellar édition.
- [Coorevits *et al.*, 1995] COOREVITS, P., LADEVÈZE, P. et PELLE, J. (1995). Automatic adaptive meshing for a prescribed accuracy in 2D elasticity. *Thin-Walled Structures*, 21:241–252.
- [Coré *et al.*, 2003] CORÉ, X., ANGOT, P. et LATCHÉ, J.-C. (2003). A multilevel local mesh refinement projection method for low Mach number flows. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61(3-6):477–488.
- [Cox, 1990] COX, B. (1990). Pellet-clad interaction (PCI) failures of zirconium alloy fuel cladding - A review. *Journal of Nuclear Materials*, 172:249–292.
- [Delmas, 2008] DELMAS, J. (2008). *Stratégies de contrôle d'erreur en calcul de structures industrielles*. Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules Verne.
- [Delmas, 2011] DELMAS, J. (2011). *Estimateurs d'erreur en quantités d'intérêt*. Manuel de référence Code\_Aster.
- [Demkowicz *et al.*, 1985] DEMKOWICZ, L., DEVLOO, P. et ODEN, J. (1985). On a h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53(1):67–89.
- [Demkowicz *et al.*, 1989] DEMKOWICZ, L., ODEN, J., RACHOWICZ, W. et HARDY, O. (1989). Toward a universal h-p adaptive finite-element strategy - 1. Constrained approximation and data structure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77(1-2):79–112.
- [Desroches, 2009] DESROCHES, X. (2009). *Estimateur d'erreur de Zhu-Zienkiewicz en élasticité 2D*. Manuel de référence Code\_Aster.
- [Devloo *et al.*, 1988] DEVLOO, P., ODEN, J. et PATTANI, P. (1988). An h-p adaptive finite-element method for the numerical-simulation of compressible flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70(2):203–235.

- [Diard, 2001] DIARD, O. (2001). *Un exemple de couplage, comportement-endommagement-environnement, dans les polycristaux. Application à l'Interaction Pastille-Gaine*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Díez et Huerta, 1999] DÍEZ, P. et HUERTA, A. (1999). A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176: 215–229.
- [Désidéri, 1998] DÉSIDÉRI, J.-A. (1998). *Modèles discrets et schémas itératifs - application aux algorithmes multigrilles et multidomaines*. Hermès Editions.
- [Düster et al., 2007] DÜSTER, A., NIGGL, A. et RANK, E. (2007). Applying the hp-d version of the FEM to locally enhance dimensionally reduced models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:3524–3533.
- [Düster et Rank, 2001] DÜSTER, A. et RANK, E. (2001). The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:1925–1935.
- [Edwards et al., 1993] EDWARDS, M., ODEN, J. et DEMKOWICZ, L. (1993). An hr-adaptive approximate Riemann solver for the Euler equations in 2 dimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 14(1):185–217.
- [Fedorenko, 1961] FEDORENKO, R. (1961). A relaxation method for solving elliptic difference equations. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, pages 1092–1096.
- [Feld-Payet, 2012] FELD-PAYET, S. (2012). *Erreur d'approximation en simulation numérique pour la mécanique des structures*. Collège Polytechnique. Cours du Collège Polytechnique.
- [Feng et al., 1997] FENG, Y., PERIC, D. et OWEN, D. (1997). A non-nested Galerkin multi-grid method for solving linear and nonlinear solid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 144:307–325.
- [Ferket, 1996] FERKET, P. (1996). The finite difference based fast adaptive composite grid method. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 3(5):391–411.
- [Ferket et Reusken, 1996] FERKET, P. et REUSKEN, A. (1996). Further analysis of the local defect correction method. *Computing*, 56(2):117–139.
- [Feyel et Chaboche, 2000] FEYEL, F. et CHABOCHE, J. (2000). FE<sup>2</sup> multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4):309–330.
- [Fish, 1992] FISH, J. (1992). The s-version of the finite-element method. *Computers and Structures*, 43(3):539–547.
- [Fish et Markolefas, 1994] FISH, J. et MARKOLEFAS, S. (1994). Adaptive global-local refinement strategy based on the interior error-estimates of the h-method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(5):827–838.
- [Fish et al., 1995] FISH, J., PANDHEERADI, M. et BELSKY, V. (1995). An efficient multilevel solution scheme for large scale non-linear system. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1597–1610.
- [Fournier et al., 2011] FOURNIER, D., LE TELLIER, R. et SUTEAU, C. (2011). Analysis of an a posteriori error estimator for the transport equation with  $S_N$  and discontinuous Galerkin discretizations. *Annals of Nuclear Energy*, 38:221–231.
- [Fuchs, 1986] FUCHS, L. (1986). A local mesh-refinement technique for incompressible flows. *Computers and Fluids*, 14(1):69–81.



- [Fuenmayor *et al.*, 1997] FUENMAYOR, F., OLIVER, J. et RODENAS, J. (1997). Extension of the Zienkiewicz-Zhu error estimator to shape sensitivity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(8):1413–1433.
- [Fulton *et al.*, 1986] FULTON, S., CIESIELSKI, P. et SCHUBERT, W. (1986). Multigrid methods for elliptic problems : A review. *Monthly Weather Review*, 114:943–959.
- [Gallimard *et al.*, 1996] GALLIMARD, L., LADEVÈZE, P. et PELLE, J. (1996). Error estimation and adaptivity in elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:189–217.
- [Gallimard *et al.*, 2000] GALLIMARD, L., LADEVÈZE, P. et PELLE, J. (2000). An enhanced error estimator on the constitutive relation for plasticity problems. *Computers and Structures*, 78:801–810.
- [Garcia et Moyne, 1997] GARCIA, P. et MOYNE, M. (1997). Modelling the steady state and transient mechanical behaviour of fuel rods. In *Proceedings of the 14<sup>th</sup> SMIRT Conference, Lyon, France*, pages 263–270.
- [Garlick, 1973] GARLICK, A. (1973). Fracture of Zircaloy cladding under simulated power ramp conditions. *Journal of Nuclear Materials*, 49:209–224.
- [Gartner et Fischer, 1987] GARTNER, M. et FISCHER, G. (1987). Survey of the power ramp performance testing of KWU's PWR UO<sub>2</sub> fuel. *Journal of Nuclear Materials*, 149:29–40.
- [Ghosh et Manna, 1993] GHOSH, S. et MANNA, S. (1993). r-adapted arbitrary Lagrangian-Eulerian finite-element method in metal-forming simulation. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2(2):271–282.
- [Golias et Dutton, 1997] GOLIAS, N. et DUTTON, R. (1997). Delaunay triangulation and 3D adaptive mesh generation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 25:331–341.
- [Gratsch et Bathe, 2005] GRATSCH, T. et BATHE, K. (2005). Review - A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. *Computers and Structures*, 83:235–265.
- [Gravemeier *et al.*, 2010] GRAVEMEIER, V., GEE, M., KRONBICHLER, M. et WALL, W. (2010). An algebraic variational multiscale-multigrid method for large eddy simulation of turbulent flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(13-16):853–864.
- [Guillard, 1993] GUILLARD, H. (1993). Node-Nested Multi-Grid with Delaunay coarsening. Rapport technique 1898, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.
- [Hackbusch, 1980] HACKBUSCH, W. (1980). Convergence of multi-grid iterations applied to difference-equations. *Mathematics of Computation*, 34(150):425–440.
- [Hackbusch, 1984] HACKBUSCH, W. (1984). Local Defect Correction Method and Domain Decomposition Techniques. *Computing Suppl. Springer-Verlag*, 5:89–113.
- [Hackbusch, 1985] HACKBUSCH, W. (1985). *Multi-Grid Methods and Applications*. Numéro 4 de Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag.
- [Henson, 2003] HENSON, V. (2003). Multigrid methods for nonlinear problems : An overview. In BOUMAN, C. et STEVENSON, R., éditeurs : *Computational Imaging*, volume 5016 de *Proceedings of the Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE)*, pages 36–48. Conference on Computational Imaging, SANTA CLARA, CA, JAN 23-24, 2003.
- [Holzer et Stehle, 1979] HOLZER, R. et STEHLE, H. (1979). Results and analysis of KWU power ramp investigations. *Journal of Nuclear Materials*, 87:227–235.
- [Hu *et al.*, 2010] HU, H., BELOUETTAR, S., POTIER-FERRY, M., DAYA, E. et MAKRAFI, A. (2010). Multi-scale nonlinear modelling of sandwich structures using the Arlequin method. *Composite Structures*, 92(2):515–522.

- [Jernkvist, 1995] JERNKVIST, L. O. (1995). A model for predicting pellet-cladding interaction-induced fuel rod failure. *Nuclear Engineering and Design*, 156:393–399.
- [Kacou et Parsons, 1993] KACOU, S. et PARSONS, I. (1993). A parallel multigrid method for history-dependent elastoplasticity computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108:1–21.
- [Khadra, 1994] KHADRA, K. (1994). *Méthodes adaptatives de raffinement local multigrille ; Applications aux équations de Navier-Stokes et de l'énergie*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- [Khadra et al., 1993] KHADRA, K., ANGOT, P. et CALTAGIRONE, J. (1993). A comparison of locally adaptative multigrids methods : L.D.C., F.A.C. and F.I.C. *NASA Conf. Publ.*, 1(3224):275–292.
- [Khadra et al., 1996] KHADRA, K., ANGOT, P., CALTAGIRONE, J. et MOREL, P. (1996). Concept de zoom adaptatif en architecture multigrille locale ; étude comparative des méthodes L.D.C., F.A.C. et F.I.C. *RAIRO - Modélisation mathématique et analyse numérique*, 30(1):39–82.
- [Khadra et al., 2000] KHADRA, K., ANGOT, P., PARNEIX, S. et CALTAGIRONE, J. (2000). Fictitious domain approach for numerical modelling of Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 34(8):651–684.
- [Koren, 1990] KOREN, B. (1990). Multigrid and defect correction for the steady Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 87(1):25–46.
- [Kramer et al., 2009] KRAMER, W., CLERCX, H., MATTHEIJ, R. et MINERO, R. (2009). A finite volume local defect correction method for solving the transport equation. *Computers and Fluids*, 38(3):533–543.
- [Kubatko et al., 2009] KUBATKO, E., BUNYA, S., DAWSON, C. et WESTERINK, J. (2009). Dynamic p-adaptive Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26):1766–1774.
- [Kunert et Nicaise, 2003] KUNERT, G. et NICAISE, S. (2003). Zienkiewicz-Zhu error estimators on anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes. *ESAIM - Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 37(6):1013–1043.
- [Ladevèze, 2011] LADEVÈZE, P. (2011). Model verification through guaranteed upper bounds : State of the art and challenges. In AUBRY, D., DÍEZ, P., TIE, B. et PARÉS, N., éditeurs : *Adaptive Modeling and Simulation 2011*, pages 20–29. ADMOS 2011, V International Conference on Adaptive Modeling and Simulation, 6-8 June, Paris, France.
- [Ladevèze et Leguillon, 1983] LADEVÈZE, P. et LEGUILLON, D. (1983). Error estimate procedure in the finite-element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20:485–509.
- [Lansiart et Michel, 2008] LANSIART, S. et MICHEL, B. (2008). *Les combustibles nucléaires*, chapitre L'interaction pastille-gaine, pages 41–46. Commissariat à l'Énergie Atomique, Monographie de la Direction de l'Énergie Nucléaire.
- [Le Tallec, 1994] LE TALLEC, P. (1994). Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 1:121–220.
- [Lebon, 1995] LEBON, F. (1995). Two-grid method for regularized frictional elastostatics problems. *Engineering Computations*, 12:657–664.
- [Lebon et al., 2007] LEBON, F., RAOUS, M. et ROSU, I. (2007). Multigrid methods for unilateral contact problems with friction. In WRIGGERS, P. et NACKENHORST, U., éditeurs : *IUTAM Symposium on Computational Contact Mechanics*, pages 1–16. Springer. 5-8 November, Hannover, Germany.

- [Lebrun-Grandié *et al.*, 2011] LEBRUN-GRANDIÉ, D., RAGUSA, J. et TURCKIN, B. (2011). Adaptive multimesh hp-FEM for a coupled neutronics and nonlinear heat conduction problem. In *International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering*. American Nuclear Society. 8-12 May, Rio de Janeiro, Brazil.
- [Lee *et al.*, 2010] LEE, P., GRIFFITH, B. et PESKIN, C. (2010). The immersed boundary method for advection-electrodifffusion with implicit timestepping and local mesh refinement. *Journal of Computational Physics*, 229(13):5208–5227.
- [Lemke et Quinlan, 1992] LEMKE, M. et QUINLAN, D. (1992). Fast adaptive composite grid methods on distributed parallel architectures. *Communications in Applied Numerical Methods*, 8(9):609–619.
- [Linden *et al.*, 1988] LINDEN, J., STECKEL, B. et STÜBEN, K. (1988). Parallel multigrid solution of the Navier-Stokes equations on general 2D domains. *Parallel Computing*, 7(3):461–475.
- [Marchal *et al.*, 2009] MARCHAL, N., CAMPOS, C. et GARNIER, C. (2009). Finite element simulation of Pellet-Cladding Interaction (PCI) in nuclear fuel rods. *Computational Materials Science*, 45:821–826.
- [Marelle et Thouvenin, 2011] MARELLE, V. et THOUVENIN, G. (2011). Alcyone V1.2.3. : Notice d'utilisation. Rapport technique NT 11-012, CEA/DEN/CAD/DEC/SESC/LSC.
- [McCormick, 1984] MCCORMICK, S. (1984). Fast Adaptive Composite Grid (F.A.C.) Methods : theory for the variational case. *Computing Suppl. Springer-Verlag*, 5:115–121.
- [McCormick, 1994] MCCORMICK, S. (1994). Multilevel adaptive methods for elliptic eigenproblems - A 2-level convergence theory. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(6):1731–1745.
- [Michel *et al.*, 2013] MICHEL, B., NONON, C., SERCOMBE, J., MICHEL, F. et MARELLE, V. (2013). Simulation of pellet-cladding interaction with the pleiades fuel performance software environment. *Nuclear Technology*, 182.
- [Michel *et al.*, 2008a] MICHEL, B., SERCOMBE, J. et THOUVENIN, G. (2008a). A new phenomenological criterion for pellet-cladding interaction rupture. *Nuclear Engineering and Design*, 238:1612–1628.
- [Michel *et al.*, 2008b] MICHEL, B., SERCOMBE, J., THOUVENIN, G. et CHATELET, R. (2008b). 3D fuel cracking modelling in pellet cladding mechanical interaction. *Engineering Fracture Mechanics*, 75:3581–3598.
- [Minero *et al.*, 2006] MINERO, R., ANTHONISSEN, M. et MATTHEIJ, R. (2006). A local defect correction technique for time-dependent problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 22:128–144.
- [Mocellin *et al.*, 2001] MOCELLIN, K., FOURMENT, L., COUPEZ, T. et CHENOT, J. (2001). Toward large scale FE computation of hot forging process using iterative solvers, parallel computation and multigrid algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52(5-6):473–488.
- [Murthy et Mukhopadhyay, 2000] MURTHY, K. et MUKHOPADHYAY, M. (2000). Adaptive finite element analysis of mixed-mode crack problems with automatic mesh generator. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49(8):1087–1100.
- [Nakamura *et al.*, 1984] NAKAMURA, M., HIRAMOTO, K. et MARU, A. (1984). Evaluations of LWR fuel rod behavior under operational transient conditions. *Nuclear Engineering and Design*, 80:49–63.
- [Nefedov et Mattheij, 2002] NEFEDOV, V. et MATTHEIJ, R. (2002). Local defect correction with different grid types. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 18(4):545–468.



- [Nonon *et al.*, 2004] NONON, C., LANSIART, S., STRUZIK, C., PLANCQ, D., MARTIN, S., DECROIX, G., RAMBOUILLE, O., BEGUIN, S. et JULIEN, B. (2004). Differential PCI behaviour of PWR fuel rods under transient conditions. *In International Topical Meeting on LWR Fuel Performance*. American Nuclear Society. 19-22 September, Orlando, Florida.
- [Notay, 2010] NOTAY, Y. (2010). An aggregation-based algebraic multigrid method. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 37:123–146.
- [Oden et Demkowicz, 1991] ODEN, J. et DEMKOWICZ, L. (1991). H-p adaptive finite-element methods in computational fluid-dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 89(1-3):11–40.
- [Oden *et al.*, 1989] ODEN, J., DEMKOWICZ, L., RACHOWICZ, W. et WESTERMANN, T. (1989). Toward a universal h-p adaptive finite-element strategy - 2. A posteriori error estimation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77(1-2):113–180.
- [Oden et Feng, 1996] ODEN, J. et FENG, Y. (1996). Local and pollution error estimation for finite element approximations of elliptic boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74:245–293.
- [Pares *et al.*, 2006] PARES, N., DÍEZ, P. et HUERTA, A. (2006). Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:297–323.
- [Parret-Fréaud *et al.*, 2010] PARRET-FRÉAUD, A., REY, C., GOSSELET, P. et FEYEL, F. (2010). Fast estimation of discretization error for FE problems solved by domain decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:3315–3323.
- [Parsons et Hall, 1990a] PARSONS, I. et HALL, J. (1990a). The multigrid method in solid mechanics : Part I - Algorithm description and behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(4):719–737.
- [Parsons et Hall, 1990b] PARSONS, I. et HALL, J. (1990b). The multigrid method in solid mechanics : Part II - Prctical applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(4):739–753.
- [Pascal, 2007] PASCAL, S. (2007). Notice de développement de la version 2.0 du composant mécanique de PLEIADES : INCREPL. Rapport technique RT/07-022/A PLE07-010, CEA/DEN/DM2S/SEMT/LM2S.
- [Qiao *et al.*, 2011] QIAO, H., YANG, Q., CHEN, W. et ZHANG, C. (2011). Implementation of the Arlequin method into ABAQUS : Basic formulations and applications. *Advances in Engineering Software*, 42(4):197–207.
- [Rachowicz *et al.*, 1989] RACHOWICZ, W., ODEN, J. et DEMKOWICZ, L. (1989). Toward a universal h-p adaptive finite-element strategy - 3. Design of h-p meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 77(1-2):181–212.
- [Ramière, 2008] RAMIÈRE, I. (2008). Convergence analysis of the  $Q_1$ -finite element method for elliptic problems with non-boundary-fitted meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(9):1007–1052.
- [Ramière *et al.*, 2007a] RAMIÈRE, I., ANGOT, P. et BELLIARD, M. (2007a). A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:766–781.
- [Ramière *et al.*, 2007b] RAMIÈRE, I., ANGOT, P. et BELLIARD, M. (2007b). A general fictitious domain method with immersed jumps and multilevel nested structured meshes. *Journal of Computational Physics*, 225:1347–1387.

- [Rannacher et Suttmeier, 1999] RANNACHER, R. et SUTTMEIER, F. (1999). A posteriori error estimation and mesh adaptation for finite element models in elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176(1-4):333–361.
- [Raviart et Thomas, 1998] RAVIART, P.-A. et THOMAS, J.-M. (1998). *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Dunod édition.
- [Retel et al., 2004] RETEL, V., TRIVAUDEY, F., BOUBAKAR, M., PERREUX, D. et THEVENIN, P. (2004). Comparative effects of structural and material parameters variability on Pellet-Cladding Interaction in a PWR fuel rod. *Nuclear Engineering and Design*, 228:35–46.
- [Ritter et al., 2010] RITTER, D., STURMER, M. et RUDE, U. (2010). A fast-adaptive composite grid algorithm for solving the free-space Poisson problem on the cell broadband engine. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 17(2-3):291–305.
- [Roberts, 1978] ROBERTS, G. (1978). The concentration of stress in cladding produced by the expansion of cracked fuel pellets. *Nuclear Engineering and Design*, 47:257–266.
- [Schwarz, 1870] SCHWARZ, H. (1870). Über einen grenzübergang durch alternierendes verfahren. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 15:272–286.
- [Sercombe, 2011] SERCOMBE, J. (2011). Mise en œuvre de calculs 3D avec maillages raffinés au point triple. Présentation CEA/DEC/SESC/LSC.
- [Sercombe et al., 2012] SERCOMBE, J., AUBRUN, I. et NONON, C. (2012). Power ramped cladding stresses and strains in 3d simulations with burnup-dependent pellet-clad friction. *Nuclear Engineering and Design*, 242:164–181.
- [Sercombe et al., 2013] SERCOMBE, J., JULIEN, J., MICHEL, F., MICHEL, B. et FÉDÉRICI, E. (2013). 3D modelling of strain concentration due to PCI within the fuel code ALCYONE. *In Proceedings of Top Fuel 2013*. American Nuclear Society. Charlotte, NC.
- [Soba et Denis, 2008] SOBA, A. et DENIS, A. (2008). Simulation with DIONISIO 1.0 of thermal and mechanical pellet-cladding interaction in nuclear fuel rods. *Journal of Nuclear Materials*, 374:32–43.
- [Solin et al., 2010] SOLIN, P., CEVERNY, J., DUBCOVA, L. et ANDRS, D. (2010). Monolithic discretization of linear thermoelasticity problems via adaptive multimesh hp-FEM. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234:2350–2357.
- [Stein et al., 2004] STEIN, E., de BORST, R. et HUGHES, T. (2004). *Encyclopedia of computational mechanics*, volume 1, chapitre 4. John Wiley & Sons, Ltd.
- [Strouboulis et Haque, 1992a] STROUBOULIS, T. et HAQUE, K. (1992a). Recent experiences with error estimation and adaptivity - 1. Review of error estimator for scalar elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 97(3):339–436.
- [Strouboulis et Haque, 1992b] STROUBOULIS, T. et HAQUE, K. (1992b). Recent experiences with error estimation and adaptivity - 2. Error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(3):359–430.
- [Stuben, 2001] STUBEN, K. (2001). A review of algebraic multigrid. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128:281–309.
- [Sun et Zamani, 1992] SUN, W. et ZAMANI, N. (1992). An adaptive h-r boundary element algorithm for the Laplace equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(3):537–552.
- [Tezuka et Okuda, 1988] TEZUKA, A. et OKUDA, O. (1988). Trial by the r-method - An adaptive mesh refinement for the finite-element method. *JSME International Journal - Series I*, 31(1):50–55.

- [Vanek *et al.*, 2001] VANEK, P., BREZINA, M. et MANDEL, J. (2001). Convergence of algebraic multigrid based on smoothed aggregation. *Numerische Mathematik*, 88(3):559–579.
- [Verpeaux *et al.*, 1988] VERPEAUX, P., CHARRAS, T. et A.MILLARD (1988). *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, chapitre Castem2000 : une approche moderne du calcul des structures, pages 261–271. Pluralis.
- [Vince, 2002] VINCE, A. (2002). A framework for the greedy algorithm. *Discrete Applied Mathematics*, 121:247–260.
- [Wappler, 1999] WAPPLER, J. U. (1999). *Die lokale Defektkorrekturmethode zur adaptiven Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit finiten Elementen*. Thèse de doctorat, Christian-Albrechts-Universität, Kiel. in German.
- [Watremetz *et al.*, 2007] WATREMETZ, B., BAIETTO-DUBOURG, M. et LUBRECHT, A. (2007). 2D thermo-mechanical contact simulations in a functionally graded material : A multigrid-based approach. *Tribology International*, 40:754–762.
- [Webster, 2011] WEBSTER, R. (2011). Mixed-order interpolation for the Galerkin coarse-grid approximations in algebraic multigrid solvers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(2):175–188.
- [Wendland, 1991] WENDLAND, W. L. (1991). Analytical and numerical developments in 3D boundary element methods for elastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 91(1-3):1229–1235.
- [Wesseling et Oosterlee, 2001] WESSELING, P. et OOSTERLEE, C. (2001). Geometric multigrid with applications to computational fluid dynamics. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128:311–334.
- [Wriggers et Scherf, 1998] WRIGGERS, P. et SCHERF, O. (1998). Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4-8):437–447.
- [Yue et Robbins, 2005] YUE, Z. et ROBBINS, D. (2005). Adaptive superposition of finite element meshes in elastodynamic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(11):1604–1635.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1987] ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992a] ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1992a). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimation. Part I : The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1331–1364.
- [Zienkiewicz et Zhu, 1992b] ZIENKIEWICZ, O. et ZHU, J. (1992b). The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimation. Part II : Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1365–1382.





## Raffinement de maillage multi-grille local en vue de la simulation 3D du combustible nucléaire des Réacteurs à Eau sous Pression

**Résumé :** Le but de cette étude est d'améliorer les performances, en termes d'espace mémoire et de temps de calcul, des simulations actuelles de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine (IPG), phénomène complexe pouvant avoir lieu lors de fortes montées en puissance dans les réacteurs à eau sous pression. Parmi les méthodes de raffinement de maillage, méthodes permettant de simuler efficacement des singularités locales, une approche multi-grille locale a été choisie car elle présente l'intérêt de pouvoir utiliser le solveur en boîte noire tout en ayant un faible nombre de degrés de liberté à traiter par niveau.

La méthode Local Defect Correction (LDC), adaptée à une discrétisation de type éléments finis, a tout d'abord été analysée et vérifiée en élasticité linéaire, sur des configurations issues de l'IPG, car son utilisation en mécanique des solides est peu répandue. Différentes stratégies concernant la mise en œuvre pratique de l'algorithme multi-niveaux ont également été comparées.

La combinaison de la méthode LDC et de l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz-Zhu, permettant d'automatiser la détection des zones à raffiner, a ensuite été testée. Les performances obtenues sur des cas bidimensionnels et tridimensionnels sont très satisfaisantes, l'algorithme proposé se montrant plus performant que des méthodes de raffinement h-adaptatives.

Enfin, l'algorithme a été étendu à des problèmes mécaniques non linéaires. Les questions d'un raffinement espace/temps mais aussi de la transmission des conditions initiales lors du remaillage ont entre autres été abordées. Les premiers résultats obtenus sont encourageants et démontrent l'intérêt de la méthode LDC pour des calculs d'IPG.

**Mots-clés :** Raffinement automatique de maillage, Méthode multi-grille locale, Local Defect Correction, Estimateur d'erreur *a posteriori*, Interaction Pastille-Gaine, Mécanique non linéaire avec effet d'histoire

---

## Local multigrid mesh refinement in view of nuclear fuel 3D modelling in Pressurised Water Reactors

**Abstract :** The aim of this study is to improve the performances, in terms of memory space and computational time, of the current modelling of the Pellet-Cladding mechanical Interaction (PCI), complex phenomenon which may occurs during high power rises in pressurised water reactors. Among the mesh refinement methods - methods dedicated to efficiently treat local singularities - a local multi-grid approach was selected because it enables the use of a black-box solver while dealing few degrees of freedom at each level.

The Local Defect Correction (LDC) method, well suited to a finite element discretisation, was first analysed and checked in linear elasticity, on configurations resulting from the PCI, since its use in solid mechanics is little widespread. Various strategies concerning the implementation of the multilevel algorithm were also compared.

Coupling the LDC method with the Zienkiewicz-Zhu *a posteriori* error estimator in order to automatically detect the zones to be refined, was then tested. Performances obtained on two-dimensional and three-dimensional cases are very satisfactory, since the algorithm proposed is more efficient than h-adaptive refinement methods.

Lastly, the LDC algorithm was extended to nonlinear mechanics. Space/time refinement as well as transmission of the initial conditions during the remeshing step were looked at. The first results obtained are encouraging and show the interest of using the LDC method for PCI modelling.

**Keywords :** Automatic mesh refinement, Local multigrid method, Local Defect Correction, *A posteriori* error estimator, Pellet-Cladding Interaction, Nonlinear history-dependent mechanics

---

**Discipline :** Mécanique des solides

---

**Adresse des laboratoires :** LMA, 31 chemin Joseph Aiguier, F-13402 Marseille Cedex 20  
CEA, DEN/DEC/SESC/LSC, F-13108 St-Paul Lez Durance